

# Agrégation de sciences physiques

## Concours externe

### OPTION PHYSIQUE

Problème de physique ♦ Session : 2003

## Les planètes extra - solaires

### Interaction gravitationnelle à deux corps

#### 1.1 Mouvement dans un potentiel central

La force subie par  $M_2$  est :  $\vec{F}_2 = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r}$

$$\begin{cases} m_1 \vec{a}_1 = E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \\ m_2 \vec{a}_2 = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{cases} \quad \text{Somme et } m_1 \times (2) - m_2 \times (1) \quad \begin{cases} m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = (m_1 + m_2) \vec{a}_G = \vec{0} \\ \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \ddot{\vec{r}} = -E_p'(r) \frac{\vec{r}}{r} \end{cases}$$

Première relation : conservation de la quantité de mouvement du système isolé

Deuxième relation : mouvement d'un point matériel de masse  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  repéré par  $\vec{r}$  et

d'énergie potentielle :  $E_p$ .

Conditions initiales connues donc  $\overline{OG(t)}$  et  $\vec{r}(t)$  connus et donc on peut déterminer

$$\overline{GM_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r} \quad \text{et} \quad \overline{GM_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

#### 1.2 Première loi de Kepler

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc ce vecteur est constant}$$

Cette relation exprime la conservation du moment cinétique par rapport à G dans le référentiel barycentrique.

Conséquences : le mouvement est plan et la vitesse aréolaire est constante.

#### 1.3 Cas particulier du potentiel gravitationnel

$$\text{Formule de Binet : } -\mu \frac{C^2}{r^2} \left( \frac{d^2}{d\theta^2} \left( \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \quad \text{d'où : } \frac{1}{r} = \frac{G}{C^2} (m_1 + m_2) + A \cos(\theta - \theta_0)$$

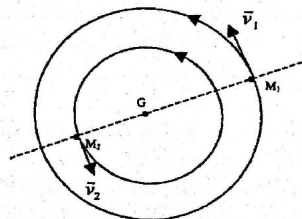
$$\text{Qui donne une ellipse pour laquelle : } p = \frac{C^2}{G(m_1 + m_2)}$$

$$\text{Avec } \frac{ab}{p} = \frac{dS}{dt} = \frac{C}{2} \quad \text{il vient : } \frac{a^3}{p^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}$$

## 1.4 Cas des orbites circulaires

$$a = r = \text{cste} = \left( P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \text{ d'où : } \begin{cases} r_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \\ r_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( P^2 \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2} \right)^{1/3} \end{cases}$$

$$\text{et } \begin{cases} v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left( \frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{1/3} \\ v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \left( \frac{2\pi G(m_1 + m_2)}{P} \right)^{1/3} \end{cases}$$



## 1.5 Applications numériques

| Couple<br>(indice 1 pour S) | $r_1$ (m)         | $r_2$ (m)            | $v_1$ (m.s <sup>-1</sup> ) | $v_2$ (m.s <sup>-1</sup> ) |
|-----------------------------|-------------------|----------------------|----------------------------|----------------------------|
| S-T                         | $4,45 \cdot 10^5$ | $1,48 \cdot 10^{11}$ | $8,85 \cdot 10^{-2}$       | $2,94 \cdot 10^4$          |
| S-J                         | $7,33 \cdot 10^8$ | $7,72 \cdot 10^{11}$ | 12,3                       | $1,3 \cdot 10^4$           |

## 2. Détection des planètes extra-solaires par observation directe

## 2.1 Définition et valeur du parsec

$\text{tg } \theta = a/d \approx \theta$  car  $a \ll d$  donc  $d \approx a/\theta$

A.N. :  $d = 3,1 \cdot 10^{16} \text{ m} = 2,1 \cdot 10^5 \text{ ua}$

## 2.2 Séparation angulaire entre l'étoile et sa planète

$D \gg a$  donc  $\theta \approx a/D$

A.N. : système Terre – Soleil :  $a = 1 \text{ ua}$  et  $D = 10 \text{ pc} \Rightarrow \theta = 0,1 \text{ arcsec}$

système Jupiter – Soleil :  $a = 5 \text{ ua}$  et  $D = 10 \text{ pc} \Rightarrow \theta = 0,5 \text{ arcsec}$

## 2.3 Puissance rayonnée par l'étoile

D'après la loi de Stefan, la puissance rayonnée par unité de surface est  $\sigma T^4$  donc

$$L^* = (4\pi R^{*2}) \sigma T^{*4}$$

## 2.4 Puissance interceptée par la planète

A la distance  $a$  de l'étoile, la puissance par unité de surface est  $L^*/(4\pi a^2)$ , la puissance interceptée est donc  $L = L^* (\pi R^2/4\pi a^2)$  soit  $L = L^* (R/2a)^2$

A.N. : planète type Jupiter :  $L/L^* = 2,2 \cdot 10^{-9}$  ; planète type Terre :  $L/L^* = 5,3 \cdot 10^{-10}$

## 2.5 Température d'équilibre de la planète

La puissance absorbée par la planète est  $(1-A)L$  ; elle est égale à la puissance rayonnée, soit  $4\pi R^2 \sigma T^4$ . Donc  $(1-A) (R/2a)^2 (4\pi R^{*2}) \sigma T^{*4} = 4\pi R^2 \sigma T^4$  ;

la température d'équilibre de la planète est donc  $T = (1-A)^{1/4} (R^*/2a)^{1/2} T^*$

A.N. :  $T(\text{Terre}) = 265 \text{ K}$  et  $T(\text{Jupiter}) = 119 \text{ K}$

(ce modèle très rudimentaire fournit donc des résultats raisonnables)

## 2.6 Maximum d'émission de la planète

D'après la loi de déplacement de Wien, la longueur d'onde du maximum d'émission d'un corps noir est inversement proportionnelle à sa température donc  $\lambda T = \lambda^* T^*$

A.N. :  $\lambda(\text{Terre}) = 11 \mu\text{m}$  ;  $\lambda(\text{Jupiter}) = 25 \mu\text{m}$  (soit des rayonnements thermiques piqués dans l'infrarouge moyen).

## 2.7 Limitations observationnelles

La résolution spatiale (ou pouvoir séparateur) d'un instrument d'optique est la plus petite séparation angulaire entre deux points qu'il permet de distinguer.

La figure de diffraction à l'infini d'une pupille circulaire est décrite par une fonction d'Airy. Son premier minimum nul définit le rayon de la tache centrale de diffraction ; il est inversement proportionnel au rayon de la pupille. Pour une pupille de diamètre  $b$ , le diamètre de la tache d'Airy obtenue à la longueur d'onde  $\lambda$  est donc  $\beta = 1,22 \lambda / b$ .

Un télescope pointant sur une source ponctuelle fournit un signal (une image) dont la répartition spatiale est sa figure de diffraction (pour une source étendue, l'image est le produit de convolution de la distribution de brillance de la source avec la figure de diffraction) ; en utilisant un critère de type Rayleigh, on considère donc que deux sources ponctuelles seront résolues par le télescope si leur séparation angulaire est au moins égale à  $\beta$ , que l'on appelle résolution du télescope.

Remarque : les radio astronomes désignent la figure de diffraction sous le nom de « lobe », les opticiens parlent de Point Source Function, ou PSF.

A.N. :  $\beta(8\text{m, visible}) = 7,6 \cdot 10^{-8} \text{ rd} = 0,016 \text{ arcsec} \Delta \theta(\text{Terre}), \theta(\text{Jupiter}),$

$\beta(8\text{m, IR}) = 40 \beta(8\text{m, visible}) = 0,64 \text{ arcsec} > \theta(\text{Terre}), \theta(\text{Jupiter}).$

En visible, du point de vue de la résolution spatiale, un télescope de 8m permettrait de résoudre les deux types de systèmes étoile – planète, situés à 10pc de la Terre. A 20 $\mu\text{m}$ , cela devient plus délicat pour un système type Jupiter et très délicat (mais pas impossible si la PSF est assez bien connue) pour un système de type Terre. De toutes façons, comme nous le verrons ci-dessous, la limitation principale n'est pas là.

Les rapports de puissances rayonnées par l'étoile et la planète,  $L^*/L$ , sont, d'après la question 2.4 de quelques  $10^8$  à quelques  $10^9$ , donc considérablement plus élevés que la dynamique des détecteurs actuels. C'est actuellement la limitation la plus sévère pour l'observation directe des planètes extra-solaires. C'est dans l'infrarouge que la situation est la plus favorable

puisque le maximum d'émission de l'étoile se situe dans le visible (au moins pour des étoiles de type Soleil), alors que celui de la planète se situe dans l'infrarouge.

### 3. Détection indirecte des planètes via le déplacement de l'étoile

On suppose désormais que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

#### 3.1 Orbite de l'étoile

En utilisant le résultat de la question 1.4 avec l'approximation  $m \ll m^*$ , on obtient immédiatement  $a \approx (G/4\pi^2)^{1/3} m^{*1/3} P^{2/3}$

Toujours d'après la première partie, la trajectoire de l'étoile est homothétique de celle de la planète avec un rapport  $-m/m^*$ , le rayon de l'orbite de l'étoile, elle aussi circulaire, autour du centre de gravité du système est donné par  $a^* = a(m/m^*)$ .

#### 3.2 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

En suivant au cours du temps la position de l'étoile sur le ciel, on observe qu'elle décrit un mouvement périodique de période  $P$ ; c'est un cercle de rayon angulaire  $\theta^*$  si le plan de l'orbite de l'étoile est perpendiculaire à la direction Terre – étoile; sinon il s'agit d'une ellipse, projection de cette orbite sur le plan du ciel, dont le demi-grand axe est le rayon angulaire  $\theta^*$ , si bien que cette méthode est applicable quelle que soit l'orientation de l'orbite par rapport à l'observateur.

Connaissant la distance  $D$  de l'étoile à la Terre, on en déduit le rayon linéaire  $a^*$  de son orbite,  $a^* = \theta^* D$ . On peut alors calculer le rayon  $a$  de l'orbite de la planète grâce à la 3<sup>ème</sup> loi de Képler et en déduire ensuite la masse  $m$  de la planète par  $m = m^*(a^*/a)$ .

#### 3.3 Planètes privilégiées par cette méthode

L'observation du mouvement périodique de l'étoile est évidemment d'autant plus aisée que son amplitude est plus grande. Comme  $a^* = a(m/m^*)$ , à masse  $m^*$  de l'étoile donnée, cette méthode de détection favorise les planètes massives et orbitant loin de leur étoile.

#### 3.4 Limitations observationnelles

Pour détecter l'existence d'une planète de type Terre autour d'une étoile de type solaire, il faut évidemment effectuer des observations pendant une durée de l'ordre de quelques périodes, donc de quelques années. Pour une planète de type Jupiter, les observations doivent s'étendre sur plusieurs dizaines d'années puisque la période est de 12 ans. En vertu de la 3<sup>ème</sup> loi de Képler ( $a^3/P^2 = \text{cste}$ ), la détection de planètes très distantes de leur étoile est donc limitée par la durée des observations (qui ne sont effectuées de façon systématique que depuis à peine 10 ans).

Le rayon angulaire du mouvement de l'étoile est donné par  $\theta^* = (a/D)(m/m^*)$

A.N. : pour un système type Terre – Soleil à  $D = 10\text{pc}$ ,  $\theta^* = 3 \cdot 10^{-7} \text{ arcsec}$  ( $= 0,3 \mu\text{as}$ )

pour un système type Jupiter – Soleil à  $D = 10\text{pc}$ ,  $\theta^* = 5 \cdot 10^{-4} \text{ arcsec}$  ( $= 0,5 \text{ mas}$ )

Aucune de ces observations n'est accessible à un télescope de 8m de diamètre (cf. 2.7)

Avec des résolutions spatiales de l'ordre de  $50 \mu\text{as}$ , qui seront accessibles au VLTI (VLT en mode interférométrique), il sera possible de détecter des systèmes type Jupiter – Soleil jusqu'à des distances de 100pc.

Les satellites interférométriques et astrométriques en projet (SIM, GAIA) devraient permettre d'atteindre des résolutions de l'ordre de la microseconde d'arc. Il sera alors possible de détecter des « Terres » à quelques parsec de la nôtre.

### 4. Détection indirecte des planètes via la vitesse de l'étoile

On suppose toujours que les planètes ont des orbites circulaires autour de leur étoile.

#### 4.1 Vitesse orbitale de l'étoile

En utilisant le résultat de la question 1.4 avec l'approximation  $m \ll m^*$ , on obtient immédiatement  $V \approx (2\pi G m^*)^{1/3} P^{-1/3}$ .

En utilisant la troisième loi de Kepler sous sa forme approchée,  $a^3/P^2 = (G/4\pi^2) m^*$ , on en déduit ensuite l'expression  $V$  en fonction de  $m^*$  et  $a$ , soit  $V \approx (G m^*/a)^{1/2}$ .

En raisonnant comme pour les orbites, la vitesse de l'étoile se déduit de celle de la planète par  $V^* = (m/m^*) V$

A.N. : pour un système Soleil – Terre,  $V = 30 \text{ km/s}$  et  $V^* = 0,09 \text{ m/s}$

pour un système Soleil – Jupiter,  $V = 13 \text{ km/s}$  et  $V^* = 13 \text{ m/s}$

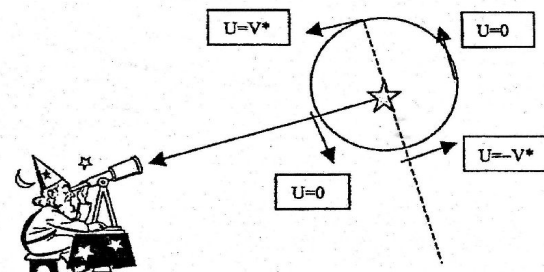
#### 4.2 Vitesse longitudinale de l'étoile

##### 4.2.1 Système vu par la tranche

La vitesse longitudinale varie sinusoidalement

$$U(t) = V^* \cos(2\pi t/P).$$

plan du ciel



##### 4.2.2 Système vu sous une inclinaison $i$

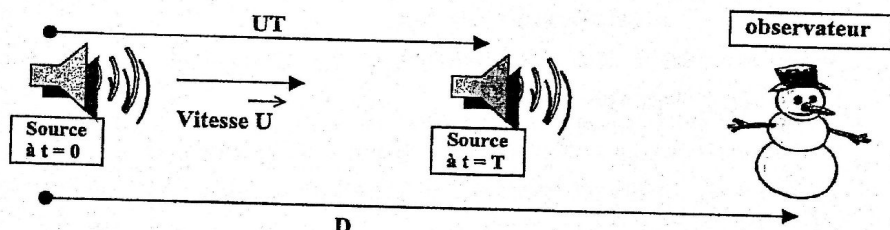
C'est la projection de la vitesse radiale sur un plan contenant la ligne de visée qu'il faut maintenant considérer, soit  $V^* \cos(\pi/2 - i) = V^* \sin i$ ; la loi de variation de la vitesse longitudinale est donc  $U(t) = V^* \sin i \cos(2\pi t/P)$

(on doit évidemment trouver qu'une orbite vue de face, c'est à dire telle que  $i = 0$ , correspond à une vitesse longitudinale identiquement nulle).

#### 4.3 Effet Doppler longitudinal

Le signal émis par la source en mouvement de vitesse  $U$  algébrique a une fréquence  $\nu$ , soit une période  $T = 1/\nu$ . Le signal, de célérité  $c$ , émis à la date  $t = 0$  atteint l'observateur à la date

$t_1 = D/c$ . Le signal émis à la date  $t = T$  atteint l'observateur à la date  $t_2 = T + (D - UT)/c$ . La période du signal perçu par l'observateur est donc  $T' = t_2 - t_1 = T(1 - U/c)$ , correspondant à une fréquence  $\nu' = 1/T'$ . En supposant que  $U \ll c$ ,  $\nu' \approx \nu(1 + U/c)$  et le décalage Doppler s'écrit, en valeur algébrique,  $\Delta\nu = \nu' - \nu \approx \nu U/c$



#### 4.4 Caractéristiques de la planète déduites par cette méthode

Le décalage Doppler  $\Delta\nu$  suit la même loi d'évolution temporelle que la vitesse longitudinale  $\Delta\nu(t) = (V^*/c) \sin i \cos(2\pi t/P)$ . Son suivi au cours du temps fournit donc la période  $P$ , ainsi qu'une limite inférieure,  $V^* \sin i$ , de la vitesse orbitale de l'étoile, puisque l'inclinaison  $i$  est en général inconnue. Connaissant la masse de l'étoile  $m^*$ , la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler fournit le rayon  $a$  de l'orbite de la planète et l'expression de  $V^*$  en fonction de  $m$ ,  $m^*$  et  $a$  (cf. 4.1) permet ainsi d'accéder à une limite inférieure de la masse de la planète :

$$m \geq m \sin i = (V^* \sin i) (m^* a / G)^{1/2}$$

Cette méthode n'est bien sûr pas applicable quand  $i = 0$  (système vu de face), car la vitesse longitudinale de l'étoile, et donc le décalage Doppler de ses raies sont nuls.

#### 4.5 Planètes privilégiées par cette méthode

Des expressions de  $V$  et  $V^*$  données en 4.1 on tire  $V^* = m (G/m^* a)^{1/2}$

Cette méthode favorise donc les planètes massives proches de leur étoile. En outre, plus la vitesse longitudinale est grande plus l'effet Doppler est facile à mesurer donc cette méthode est d'autant plus efficace que l'orbite est vue sous une inclinaison élevée (de plus, on sous-estime d'autant moins la masse de la planète).

### 5. Limitation des détections par mesure de l'effet Doppler du spectre stellaire

#### 5.1 Résolution du spectrographe

5.1.1 Le pouvoir de résolution d'un spectrographe à la longueur d'onde  $\lambda$  est  $\mathcal{R} = \lambda / \Delta\lambda$ , où  $\Delta\lambda$  est le plus petit décalage en longueur d'onde qu'il permet de résoudre.

A.N. :  $\mathcal{R} = 50000$  à  $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$  permet d'atteindre un effet Doppler  $\Delta\lambda = 0,1 \text{ \AA}$

On peut ainsi atteindre une amplitude de variation de vitesse longitudinale donnée par

$$V^* \sin i = c (\Delta\nu / \nu) = c (\Delta\lambda / \lambda) = c / \mathcal{R}$$

A.N. :  $V^* \sin i = 6 \text{ km/s}$  ce qui ne permet pas de détecter une planète type Jupiter autour d'une étoile type Soleil, et de loin ! ( $V^* = 13 \text{ m/s}$ )

5.1.2 Si la comparaison d'un spectre stellaire comportant  $N$  raies avec un spectre de référence revient à effectuer  $N$  mesures indépendantes de l'effet Doppler. La précision de la mesure est alors améliorée par un facteur  $N^{1/2}$  et on peut accéder à  $V^* \sin i = c / (\mathcal{R} N^{1/2})$

A.N. :  $N = c^2 / (\mathcal{R} V^* \sin i)^2$  donc  $V^* \sin i = 10 \text{ m/s}$  requiert  $N = 3,6 \cdot 10^5$

Remarque : en fait, les  $N$  raies ne sont pas indépendantes, car observées avec le même instrument ; en outre une même raie peut aussi être observée dans plusieurs ordres. La méthode d'analyse des données revient effectivement à augmenter la précision des mesures quand  $N$  augmente, mais la dépendance en  $N$  est plus complexe que celle indiquée ici.

#### 5.2 Limitation intrinsèque à l'étoile

5.2.1 Le rayon d'une étoile pulsante varie selon la loi  $R^*(t) = R^* + \delta R^* \cos(2\pi t / \tau)$  ;

la vitesse radiale résultante est  $V_r(t) = dR^*(t)/dt = -(2\pi / \tau) \delta R^* \sin(2\pi t / \tau)$

5.2.2 Cette vitesse radiale périodique induit une variation périodique de la fréquence des raies observées, qui peut éventuellement se confondre avec une variation périodique de fréquence due au mouvement orbital de l'étoile.

A.N. :  $\delta R^* = 0,01 R^* = 7,0 \cdot 10^6 \text{ m}$  et  $\tau = 30 \text{ jours} = 2,6 \cdot 10^6 \text{ s}$  ; l'amplitude de variation de la vitesse radiale est donc  $V_r = 17 \text{ m/s}$ , valeur qui peut tout à fait évoquer un mouvement orbital.

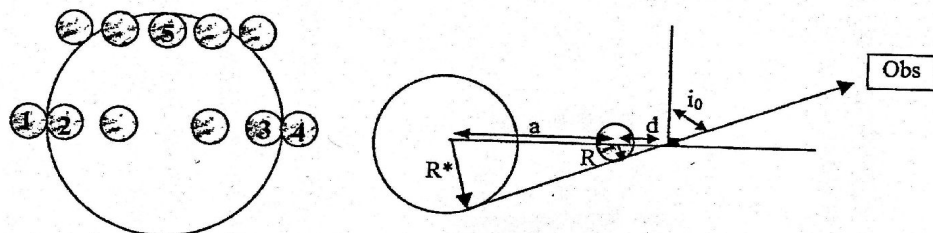
Remarque : la période de 30 jours semble, si l'on raisonne par analogie avec notre système solaire, exclure un effet de planète, mais en fait certains des systèmes planétaires observés présentent effectivement de telles périodes.

5.2.3 Bien que sa température varie peu, la puissance rayonnée par une étoile pulsante varie car son rayon et donc sa surface, varient (c'est d'ailleurs par cette variation de luminosité qu'on les repère). La variation relative de luminosité d'une étoile, dont le rayon varie de 1%, est de 2%, ce qui est relativement facile à observer. Il faut donc s'assurer, en effectuant un suivi photométrique des étoiles candidates à une recherche d'exo-planètes qu'elles ne sont pas variables avant d'interpréter les variations périodiques d'effet Doppler comme les manifestations de la présence d'une planète.

### 6. Transit de la planète devant son étoile

#### 6.1 Condition de transit

Positions successives de la planète devant son étoile lors d'un transit telles que vues par l'observateur : sur la figure de gauche, les positions 1, 2, ... 3, 4 correspondent au cas d'un système vu par la tranche ( $i = 90^\circ$ ) ; les positions ... 5... correspondent à l'angle d'inclinaison limite  $i_0$  en deçà duquel il n'y a plus de transit car la planète ne passe plus que partiellement devant l'étoile. La figure de droite représente un système vu sous l'angle limite  $i_0$ .



D'après la figure de droite,  $\sin(\pi/2 - i_0) = \cos i_0 = R/d = R^*/(a+d)$   
donc  $d = aR/(R^* - R)$  et  $\cos i_0 = (R^* - R)/a$ .

La condition permettant d'observer un transit est donc  $i \geq i_0 = \arccos[(R^* - R)/a]$

## 6.2 Probabilité de transit

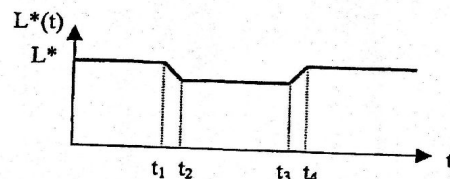
La probabilité d'une inclinaison comprise entre  $i$  et  $i+di$  est égale au rapport de la surface de la tranche de calotte sphérique à la surface de l'hémisphère, soit  $P(i, i+di) = (2\pi r \sin i)(r di) / 2\pi r^2 = \sin i di$

La probabilité d'une inclinaison supérieure à  $i_0$  s'obtient en intégrant  $P(i, i+di)$  de  $i_0$  à  $\pi/2$ , soit  $P(i \geq i_0) = \cos i_0$

A.N. Pour une planète comme Jupiter qui orbiterait à 0,05 ua de son étoile de type Soleil, l'angle minimum permettant d'observer un transit est  $i_0 = 85,2^\circ$  et la probabilité d'observer un transit est  $P(i \geq i_0) = 8,4\%$ .

## 6.3 Courbe de lumière de l'étoile lors d'un transit de la planète

En utilisant la numérotation des positions de la planète de la figure plus haut, l'allure de la courbe de lumière est la suivante (les variations de  $t_1$  à  $t_2$  et de  $t_3$  à  $t_4$  ne sont pas linéaires).



Lorsque la planète occupe les positions 2 à 3, l'observateur perçoit une diminution relative de luminosité stellaire qui correspond au rapport des surfaces des disques stellaires et planétaires, soit  $\Delta L^*/L^* = (R/R^*)^2$ .

Remarque : ce n'est pas tout à fait exact car le disque stellaire n'est pas uniformément lumineux.

La durée totale du transit est celle qui sépare le 1<sup>er</sup> contact (position 1) du dernier contact (position 4) :  $\tau_t = (t_4 - t_1) = 2(R^* + R)/V$  ; la vitesse orbitale  $V$  de la planète est donnée par  $V = 2\pi a/P$  donc  $\tau_t = (R^* + R)P/\pi a$ .

De la même façon, la durée du minimum de la courbe de lumière, soit  $\tau_m = (t_3 - t_2)$  est donnée par  $\tau_m = (R^* - R)P/\pi a$

A partir de  $\tau_t$  et  $\tau_m$ , il est possible de déterminer le rayon de la planète (celui de l'étoile aussi, mais il est cependant plus précis de le déterminer par une modélisation de l'étoile). Il est également possible d'en déduire l'inclinaison  $i$  de l'orbite puisque la courbe de lumière fournit  $V$  et l'effet Doppler  $V \sin i$  (mais ce n'est pas la réponse suggérée par l'énoncé puisque l'on suppose  $i = 90^\circ$ ).

## 7. Propriétés des planètes détectées

### 7.1 La planète de l'étoile HD20945B

7.1.1 La vitesse longitudinale (déterminée par l'effet Doppler) suit une variation sinusoïdale dont la valeur moyenne correspond à la vitesse du centre de gravité du système étoile - planète et dont l'amplitude fournit la vitesse longitudinale  $U$  du mouvement orbital de l'étoile. D'après les données expérimentales, on estime  $P = 3,5$  jours (les auteurs de l'article, qui ont effectué une analyse moins rudimentaire de la courbe, donnent  $P = 3,52433 \pm 0,00027$  jours).

La vitesse du centre de gravité (non demandée dans l'énoncé) est de  $-14,77$  km/s environ et la vitesse longitudinale de l'étoile est  $U = V \sin i = 85$  m/s (les auteurs donnent respectivement  $-14,7652 \pm 0,0016$  km/s et  $85,9 \pm 2,0$  m/s).

7.1.2 Le rayon orbital de la planète est donné par la troisième loi de Kepler (cf. question 3.1)  $a = (G/4\pi^2)^{1/3} m^*{}^{1/3} P^{2/3}$ .

A.N. :  $a = (6,7 \cdot 10^{-11} / 4\pi^2)^{1/3} (1,1 \times 10^{30})^{1/3} (3,5 \times 24 \times 3600)^{2/3}$ , soit  $a = 7,0 \cdot 10^9$  m = 0,047 ua.

La masse de la planète est donnée par  $m \geq m \sin i = V \sin i (m^* a / G)^{1/2}$  (cf. 4.1)

A.N. :  $m \geq 1,2 \cdot 10^{27}$  kg = 0,60  $M_J$ .

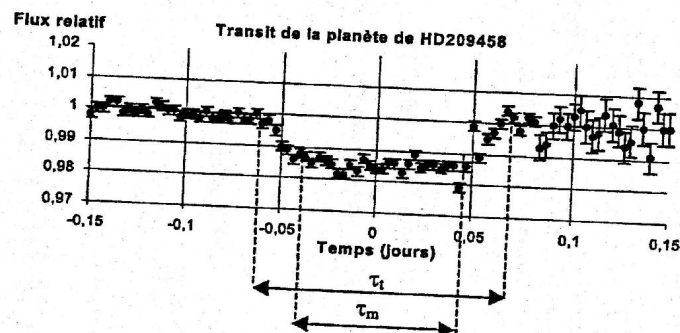
Les incertitudes relatives sur ces valeurs sont données par

$$(\Delta a / a)^2 = 1/9 (\Delta m^* / m^*)^2 + 4/9 (\Delta P / P)^2 \text{ soit } \Delta a / a \approx 3\%$$

$$\text{et } (\Delta(m \sin i) / (m \sin i))^2 = (\Delta U / U)^2 + 4/9 (\Delta m^* / m^*)^2 + 1/9 (\Delta P / P)^2$$

soit  $\Delta(m \sin i) / (m \sin i) \approx 8\%$

7.1.3 La courbe de lumière permet de déterminer les durées  $\tau_t = (R^* + R)P/\pi a$  et  $\tau_m = (R^* - R)P/\pi a$  d'où l'on tire directement le rayon de la planète :  $R = \pi a (\tau_t - \tau_m) / 2P$ . Cependant, comme la détermination de  $\tau_t - \tau_m$  est peu précise, il est a priori préférable, puisque  $R^*$  est donnée, de tirer  $R$  de la mesure de  $\tau_t$  :  $R = R^* + (\pi a \tau_t / P)$  ou de celle, un peu plus incertaine, de  $\tau_m$  :  $R = R^* - (\pi a \tau_m / P)$ . On peut aussi utiliser  $\tau_t / \tau_m = (R^* + R)/(R^* - R)$



On mesure  $\tau_t = 0,128$  jours (à 0,01 jour près) et  $\tau_m = 0,084$  jours (à 0,01 jour près).

La première méthode fournit :  $R = 1,4 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,2 R_\odot (= 2 R_J)$ , avec une incertitude  $\Delta R/R \approx \Delta a/a + (\Delta \tau_t + \Delta \tau_m) / (\tau_t - \tau_m)$  de l'ordre de 50 % !

La deuxième méthode aboutit à une incohérence car avec les valeurs ci-dessus,  $\pi a \tau_t / P = 8,0 \cdot 10^8 \text{ m}$  et se trouve donc inférieur à la valeur de  $R^*$  donnée dans l'énoncé !

La troisième méthode fournit  $R = 3,1 \cdot 10^8 \text{ m} = 0,45 R_\odot (= 4,5 R_J)$ , avec une incertitude  $\Delta R \approx 1,5 \cdot 10^8 \text{ m}$  soit de l'ordre de 40 %, ce qui n'est pas beaucoup mieux que la première méthode. La dernière méthode fournit  $R = 0,25 R_\odot (= 2,5 R_J)$ .

*Remarque : ces difficultés proviennent principalement de l'utilisation d'une méthode trop rudimentaire d'analyse de la courbe de lumière, ajoutée à l'hypothèse abusive de système vu par la tranche. Les modèles plus raffinés de courbe de lumière fournissent des valeurs de  $i$  de  $86^\circ$  à  $87^\circ$  et de  $R$  de  $1,25$  à  $1,4 R_J$  (avec des valeurs de  $R^*$  variant de  $1,1$  à  $1,2 R_\odot$ ).*

7.1.4 La masse volumique de la planète s'obtient en supposant que celle-ci est une sphère uniforme, donc  $\rho = 3m / (4\pi R^3)$

**A.N. :** En supposant toujours que l'inclinaison vaut  $90^\circ$  et avec  $R = 2 R_J$ ,  $\rho \approx 104 \text{ kg/m}^3$ . Il s'agit évidemment là d'une masse volumique de planète essentiellement gazeuse.

*Remarque : La valeur publiée est de  $380 \text{ kg/m}^3$  ; elle est notablement plus faible que celle de Saturne ( $700 \text{ kg/m}^3$ ), qui est pourtant la moins dense des planètes gazeuses du système solaire.*

7.1.5 La température d'équilibre de la planète,  $T = (1-A)^{1/4} (R^*/2a)^{1/2} T^*$ , vaut 1350K

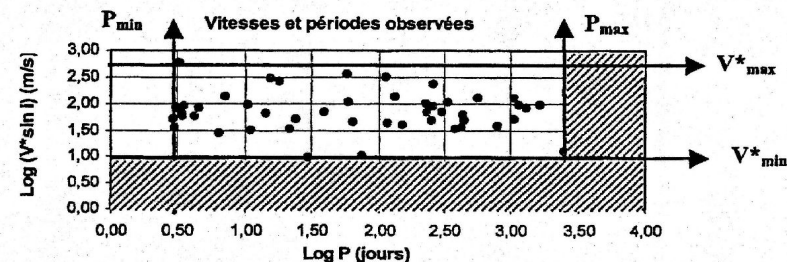
7.1.6 Ce type de planète a été baptisé « Jupiter » en raison de sa masse et de son rayon et « chaud » en raison de sa proximité à l'étoile, donc de sa température.

## 7.2 Etude statistique des propriétés des 50 premières planètes détectées.

7.2.1 Les planètes détectées ont des vitesses telles que  $1,0 \leq \log(V^* \sin i) \leq 2,7$  soit  $10 \text{ m/s} \leq V^* \sin i \leq 500 \text{ m/s}$  dont la limite inférieure est une limite observationnelle due à la résolution des spectrographes disponibles aujourd'hui.

(Les nouvelles générations de spectrographes dédiés permettront d'atteindre des résolutions de l'ordre du m/s, mais demanderont alors une analyse encore plus fine des biais dus à l'étoile elle-même).

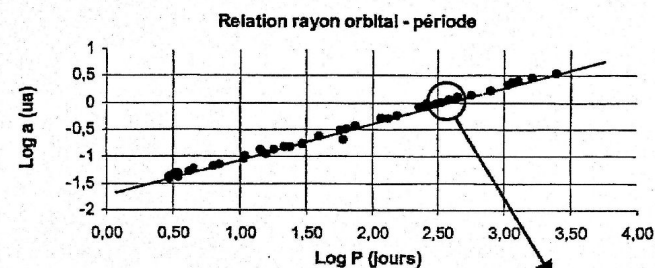
Les périodes observées sont telles que  $0,5 \leq \log P \leq 3,4$  soit  $3 \text{ j} \leq P \leq 2500 \text{ j} \approx 7 \text{ ans}$  dont la limite supérieure est une limite observationnelle due au fait que ce type de suivi Doppler systématique est encore très récent.



▨ Zones de paramètres encore inaccessibles aux observations

7.2.2 La corrélation entre les paramètres  $a$  et  $P$  n'est rien d'autre que la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler (on vérifie sans peine que la pente de la droite de corrélation est 2/3), ce qui indique que les « étoiles à planètes » ont sensiblement toutes la même masse ( $\approx 1 M_\odot$ ), puisque la droite de corrélation passe par  $a = 1 \text{ ua}$  et  $P = 365 \text{ j}$ ).

**NB :** C'est un effet de sélection des étoiles « de type solaire », autour desquelles ont été cherché les planètes. On cherche aussi des planètes autour d'étoiles moins massives (type « naines brunes ») mais ce sont des objets peu lumineux et les observations sont plus difficiles de ce point de vue (en revanche les vitesses orbitales sont plus grandes).



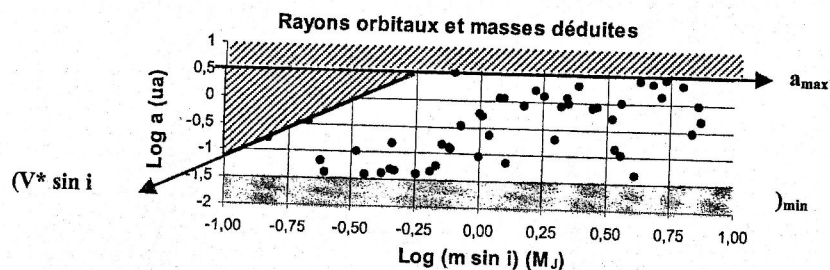
Vous êtes ici

7.2.3 En raison de la 3<sup>ème</sup> loi de Kepler, comme les étoiles ont toutes sensiblement la même masse  $m^*$ , les courbes de période constante se confondent dans le diagramme avec les droites horizontales  $\log a = 2/3 \log P + 1/3 \log (4\pi^2 / Gm^*)$ .

En supposant  $m^* = 1 M_\odot$ , la valeur de  $a$  qui correspond à la limite observationnelle  $P_{\text{max}} = 2500 \text{ j}$  est  $a_{\text{max}} = (2500 / 365)^{2/3} = 3,6 \text{ ua}$  (donc  $\log a = 0,56$ ), ce qui est bien ce que l'on constate sur la figure).

De la relation  $V^* = m (G/m^*a)^{1/2}$  (cf. 4.5), on déduit que les courbes de  $V^*$  constante (ou plus exactement de  $V^* \sin i$ ) sont les droites  $\log a = 2 \log m \sin i + \log (G/m^*) - 2 \log V^* \sin i$ .

En supposant toujours  $m^* = 1 M_\odot$ , la limite observationnelle  $(V^* \sin i)_{\min} = 10 \text{ m/s}$  fournit la droite limite  $\log a = 2 \log m \sin i + 0,95$  (avec les unités ua et  $M_j$ ), au dessus de laquelle il n'y a pas de point observé. C'est très précisément ce que l'on constate sur le diagramme.



- [Hachuré] Valeurs de paramètres encore inaccessibles à l'observation  
 [Pointillé] Zone accessible aux observations mais sans détection de planète

7.2.4 On constate que l'on n'observe pas non plus de points correspondants à des valeurs de  $\log a \leq -1,4$  c'est à dire  $a \leq 0,04 \text{ ua}$ . Il ne s'agit pas là d'un biais observationnel.

Plusieurs hypothèses sont avancées pour expliquer l'absence de planètes aussi proches de l'étoile : toutes considèrent que de telles planètes gazeuses ne peuvent pas se former aussi près de l'étoile et qu'elles ont donc dû s'en approcher une fois formées, suite à des perturbations de leur orbite. Une fois la planète géante proche de l'étoile, on peut imaginer

- qu'il y a capture et chute de la planète sur l'étoile,
- ou évaporation de la planète,
- ou que la migration est stoppée par interaction de marée,
- voire par transfert de masse entre l'étoile et la planète ;
- certains évoquent l'existence d'une cavité magnéto-sphérique vide de matière autour de l'étoile ...

Nul doute que, dès la première détection d'une planète à moins de  $0,04 \text{ ua}$  de son étoile, les modèles justifiant son existence seront tout aussi nombreux !

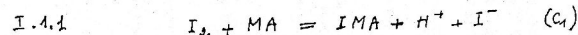
## Agrégation de sciences physiques

### Concours externe

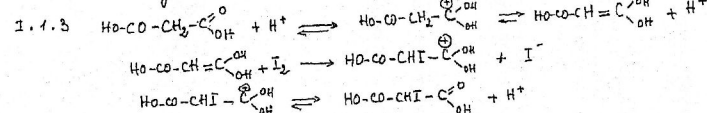
#### OPTION CHIMIE

Composition de chimie ♦ Session : 2003

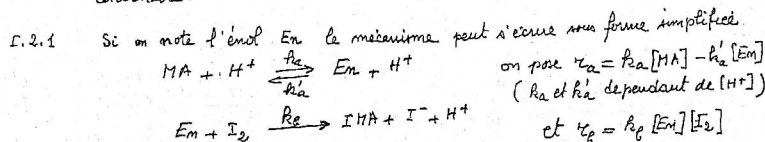
Oscillations du système dioxyde de chlore, diade, acide malonique.



I.1.2 oxydo réduction



I.1.4 D'autres agents peuvent réduire l'iode et libérer  $I^-$  à une vitesse convernable.



on en déduit :

$$- \frac{d[MA]}{dt} = \kappa_a, \quad - \frac{d[I_2]}{dt} = \kappa_e, \quad \frac{d[IMA]}{dt} = \kappa_e, \quad \frac{d[I^-]}{dt} = \kappa_e$$

$$\text{et } \frac{d[En]}{dt} = \kappa_a - \kappa_e$$

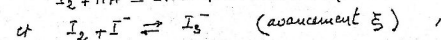
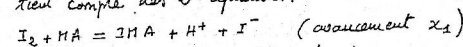
$$\text{A.E.Q.S.} \rightarrow \kappa_a = \kappa_e = \text{vitesse de } (C_1) = \kappa_1$$

$$\text{soit : } k_a[MA] = (k_a' + k_e[I_2])[En]$$

$$\text{d'où } \kappa_1 = \kappa_e = k_e \frac{k_a[MA]}{k_a' + k_e[I_2]} [I_2] = k_a \frac{[MA][I_2]}{\frac{k_a'}{k_e} + [I_2]}$$

$$\rightarrow \text{il suffit de poser } k_a = k_{12} \quad \left\{ \begin{array}{l} k_a/k_e = k_{12} \\ k_a' = k_{13} \end{array} \right.$$

I.2.2 si on tient compte des 2 équations :



$$\text{L'absorbance au point isobestique s'écrit } A = \epsilon \epsilon' ([I_3^-] + [I_2])$$

$$\text{avec } \begin{cases} [I_3^-] = [I_3^-](0) + x_2 \\ [I_2] = [I_2](0) - x_1 - x_2 \end{cases} \rightarrow ([I_3^-] + [I_2]) = [I_2](0) + [I_3^-](0) - x_1$$

La mesure de l'absorbance est aussi une mesure de l'avancement de  $(C_1)$  comme si l'équilibre  $I_2 + I^- \rightleftharpoons I_3^-$  n'existait pas.