

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectifs, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Ces deux numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'Union des professeurs de physique et chimie et tous les renseignements à ce sujet peuvent être obtenus sur le site de l'UdPPC :

<http://www.udppc.asso.fr/>

André GILLES
Rédacteur en chef du bulletin

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de physique ♦ Session : 2004

A Ondes et propagation

A1a Propagation : transmission d'une information liée à une perturbation d'une grandeur physique au sein d'un milieu. grandeur caractéristique : célérité

Exemples :

- Champs E électrique et B magnétique dans le vide, dans un diélectrique
- Propagation d'une « secousse » transversale le long d'une corde tendue
- Propagation d'une compression longitudinale dans un ressort, une chaîne d'atomes
- Propagation d'une impulsion (tension, courant) dans une ligne électrique
- Propagation d'un son

A1b $\Delta g - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$ scalaire ou vectorielle

A1c Célérité ou vitesse de propagation en m.s^{-1}

Exemples : $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ Ondes électromagnétiques dans le vide $3 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$ Ondes acoustiques son dans l'air 340 m.s^{-1}

$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ Ondes transversales dans une corde tendue

$c = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$ Ondes longitudinales dans un ressort (m masse linéique,

$k_l = KL$ pour un ressort de longueur L et de raideur K

$c = \sqrt{\frac{1}{\Lambda \Gamma}}$ Ondes dans une ligne électrique (Λ et Γ inductance et capacité linéiques de la ligne).

A2 Diffusion liée à l'inhomogénéité d'une grandeur au sein d'un milieu, existence d'un courant tendant à homogénéiser cette grandeur. Phénomène essentiellement irréversible. Equation de diffusion (sans termes de source) :

$$-\frac{1}{D} \frac{\partial g}{\partial t} + \Delta g = 0$$

CORR EPA 2004

$$\text{avec } \vec{j} = -D \vec{\text{grad}} g$$

$$\text{soit } -\frac{1}{D} \frac{\partial g}{\partial t} + \Delta g = 0$$

Exemples : diffusion thermique ($g = T$) diffusion de particules ($g = n$)

Grandeur caractéristique diffusivité D en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$.

Convection : transport d'une grandeur lié à un mouvement global de matière

Exemple : convection thermique dans un fluide caloporteur

Ne pas confondre : son et vent, houle et courant, propagation et vitesse des électrons dans une ligne

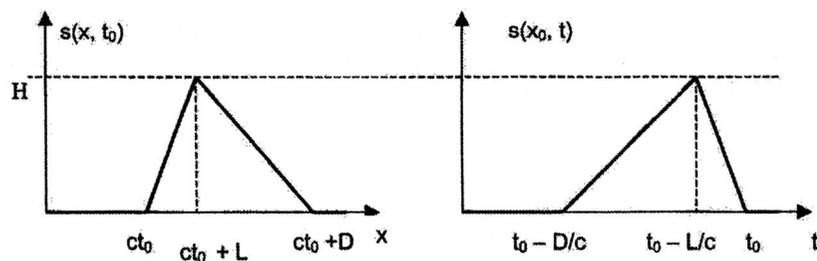
A3a La grandeur $s(x, t)$ associée à l'onde plane a même valeur à l'instant t dans des plans $x = \text{constante}$, orthogonaux à la direction de propagation.

La solution générale de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle est :

$$s(x, t) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x)$$

qui correspondent respectivement à des propagations dans le sens des x croissants et décroissants

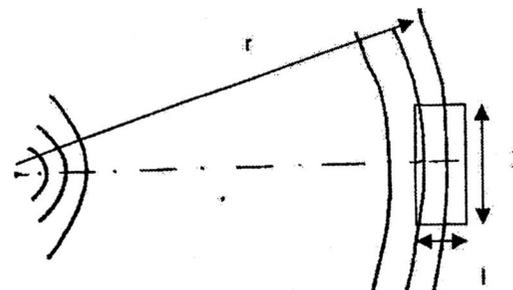
A3b



A3c
$$s(r, t) = \frac{1}{r} (f_1(ct - r) + f_2(ct + r))$$

La décroissance en $\frac{1}{r}$ est liée à un accroissement des surfaces d'onde et non à une absorption de l'onde par le milieu : la puissance totale transportée par l'onde est, dans ce modèle, conservée.

Le courant de puissance est proportionnel à g^2 (donc en $\frac{1}{r^2}$), mais son flux à travers une surface sphérique de rayon r fait disparaître la dépendance en r et conserve donc la puissance totale.



A grande distance de la source de l'onde sphérique, et sur une portion d'espace limitée ($l, L \ll r$), les surfaces d'onde sont assimilables à des plans et le facteur $\frac{1}{r}$ varie peu : l'onde est dite localement plane.

A3d Par analyse de Fourier, toute onde apparaît comme une « somme » d'ondes sinusoïdales.

A3e \vec{k} est appelé vecteur d'onde. Il est parallèle à la direction de propagation, dirigé dans le sens de propagation.

Si le milieu est non dispersif et transparent : $k = \frac{\omega}{c}$, $\lambda = \frac{2\pi}{k} = cT$ représente la période spatiale de l'onde.

A3f Dans le cas d'une onde plane progressive de la forme $f(ct - x)$ se propageant dans un milieu illimité, les deux grandeurs couplées associées à l'onde sont en fait proportionnelles ; Le facteur de proportionnalité, caractéristique du milieu de propagation est appelé impédance caractéristique.

L'exemple le plus immédiat est celui d'une onde dans une ligne électrique où la tension $U(x, t)$ et l'intensité $i(x, t)$ sont reliées par :

$$\frac{U(x, t)}{i(x, t)} = Z_c = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \text{ où } \Lambda \text{ et } \Gamma \text{ sont les inductance et capacité linéique de la ligne.}$$

Citons aussi :

$$\begin{aligned} \text{Ondes acoustiques} & \quad Z_c = \frac{\delta P}{v} = \sqrt{\frac{P_0}{\chi_s}} \text{ impédance acoustique} \\ \text{Ondes électromagnétiques} & \quad Z_c = \frac{E}{H} \end{aligned}$$

Rq. Pour une onde de la forme $f(ct + x)$, Z_c est changée en $-Z_c$.

La notion d'impédance d'onde est très utile pour décrire le comportement d'une onde dans le cas d'un milieu limité :

- Quand l'onde est réfléchiée par la limite, celle-ci possède elle-même une impédance qui permet de calculer le coefficient de réflexion. En particulier, un milieu fermé sur son impédance caractéristique se comporte comme un milieu illimité (le coefficient de réflexion est nul).

- Quand l'onde passe d'un milieu d'impédance Z_{c1} à un milieu d'impédance Z_{c2} , ces valeurs permettent de calculer les coefficients de réflexion et de transmission de l'onde.

A3g Dans le vide $B = \frac{E}{c}$ et $H = \frac{B}{\mu_0}$. Avec $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, il vient : $Z_c = \frac{E}{H} = \mu_0 c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$

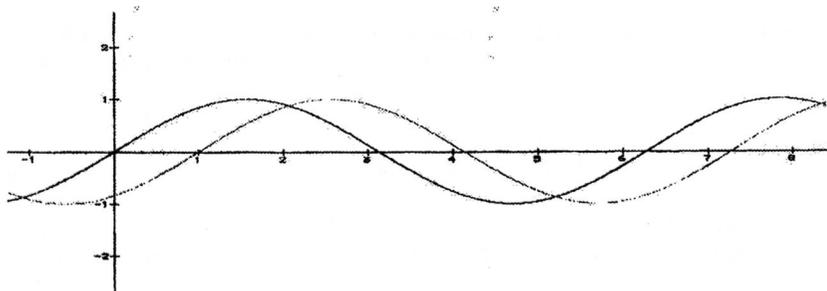
Au conducteur parfait est associé le modèle limite d'un conducteur de conductivité infinie. La loi d'Ohm implique alors que le champ électrique est nul, et par conséquent, le champ magnétique indépendant du temps (Maxwell-Faraday). L'impédance de ce milieu est alors nulle (on retrouve le coefficient de réflexion -1 pour le champ électrique d'une onde frappant un conducteur parfait en incidence normale).

Rq. Un calcul plus poussé des champs E et B dans un conducteur réel confirme bien que Z_c tend vers 0 quand la conductivité tend vers l'infini...

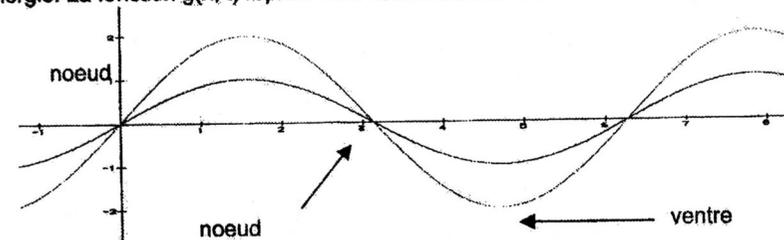
A4a Quand l'onde arrive sur une limite, elle y subit une réflexion et/ou une transmission suivant la nature de cette limite.

A4b L'onde stationnaire représente une solution à variables séparées de l'équation de d'Alembert, de la forme $s(x, t) = f(x).g(t)$.

Physiquement l'onde progressive se propage (et propage de l'énergie) si bien que la fonction $s(x, t)$ représentée en fonction de x à deux instants différents a la forme :



Au contraire l'onde stationnaire évolue « sur place » et ne propage pas en moyenne d'énergie. La fonction $g(x, t)$ représentée en fonction de x à différents instants a la forme :



Sur cette représentation, apparaissent les nœuds (points d'amplitude nulle) et les ventres (points d'amplitude maximale) .

A4c Une onde stationnaire peut être mathématiquement représentée par la somme de deux ondes progressives de même amplitude se propageant dans la même direction et des sens opposés.

Physiquement cette situation est provoquée par la réflexion totale sur une limite, c'est-à-dire une réflexion dont le coefficient r est de module 1. En particulier si l'onde est représentée par les grandeurs A et B , avec $Z_c = \frac{A}{B}$, une réflexion sur une limite d'impédance nulle donne $r = -1$ pour A (nœud) et $+1$ pour B (ventre), une réflexion sur une limite d'impédance infinie donne $r = 1$ pour A et -1 pour B ...

Exemples : - Onde électromagnétique se réfléchissant du vide sur un conducteur parfait : l'onde résultante dans le vide est stationnaire et présente un nœud de champ électrique E et un ventre de champ magnétique B sur le plan.

- Corde fixée à une extrémité : nœud de vitesse et ventre de la composante transverse de tension de la corde.

- Ligne électrique en circuit ouvert : nœud d'intensité et ventre de tension.

- Ligne électrique en court-circuit : nœud de tension et ventre d'intensité...

A4d Le système constitue une cavité résonante qui sélectionne les fréquences possibles pour des ondes stationnaires s'établissant dans la cavité . Ces fréquences obéissent à :

$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} \text{ avec } D = n \frac{\lambda_n}{2} \text{ où } n \text{ est un entier.}$$

On peut citer bien sur la corde de Melde ou le tube de Kundt comme exemples classiques de cavités résonantes unidimensionnelles.

A5a Dans un milieu dispersif, la célérité de l'onde n'est pas une constante caractéristique du seul milieu mais dépend de l'onde et en particulier de sa fréquence. La relation liant k à ω n'est donc plus linéaire.

Dans un milieu absorbant, l'interaction entre le milieu et l'onde se traduit par un transfert d'énergie de l'onde vers le milieu, transfert qui conduit à un affaiblissement de cette onde.

A5b Un paquet d'onde représente en fait une onde réelle limitée dans le temps et l'espace, et conçue par analyse de Fourier comme un ensemble (discret ou continu) d'ondes harmoniques .

A chaque composante harmonique du paquet correspond une célérité différente dans le milieu dispersif qui déforme donc le paquet au cours de sa propagation dans le milieu.

A5c La relation de dispersion est la relation liant k et ω , généralement mise sous la forme

$$k = f(\omega).$$

La vitesse de phase est $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ vitesse de propagation d'une composante harmonique du paquet

La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ qui représente souvent la vitesse de propagation de l'énergie du paquet.

A5d Les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\text{Rot}\vec{B} = \mu_0(\gamma\vec{E} + \epsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}) \quad \text{Rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{E} = 0.$$

Il vient alors : $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

Pour un champ harmonique de pulsation ω , on évalue les deux derniers termes respectivement à $\mu_0\gamma\omega E$ et $\frac{\omega^2}{c^2}E$. Or, aux fréquences où s'écrit la loi d'Ohm, et pour des bons conducteurs, $\mu_0\gamma\omega \gg \frac{\omega^2}{c^2}$, (soit en fait $\omega \ll \frac{\gamma}{\epsilon_0} \approx 10^{18} \text{ s}^{-1}$) si bien que l'équation

précédente devient plutôt une équation « diffusive » d'expression : $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$

A5e Avec un champ $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$, il vient : $-k^2 + i\mu_0\gamma\omega = 0$ soit

$$k = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}(1+i) = \frac{1+i}{\delta} \quad \text{en ne retenant qu'une propagation vers les } x$$

croissants, d'où l'expression finale du champ : $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-x/\delta} e^{i(kx/\delta - \omega t)}$.

La grandeur δ est appelée épaisseur de peau et représente une distance caractéristique de pénétration de l'onde dans le conducteur ; Elle varie en $\frac{1}{\sqrt{\gamma}}$ et $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ et diminue donc aux hautes fréquences. Numériquement $\delta_{Fe, 50 \text{ Hz}} = 22,5 \text{ mm}$ et $\delta_{Cu, 1 \text{ kHz}} = 2,1 \text{ mm}$.

On peut citer des phénomènes analogues en diffusion thermique (effet de cave) et en dynamique des fluides (fluide visqueux surmontant un plan oscillant) ...

A5f Si $\omega > \omega_p$, k^2 est un réel positif, donc k aussi : le milieu n'est pas absorbant. En revanche, la relation de dispersion n'est pas linéaire et le milieu est donc bien dispersif. On a alors :

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}} \quad v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \quad v_\varphi v_g = c^2$$

Si $\omega < \omega_p$, k^2 est un réel négatif, k est imaginaire pure. L'onde n'est plus progressive mais est parfois qualifiée d'onde évanescente.

L'ionosphère est alors un filtre passe-haut qui réfléchit les ondes de basse fréquence venant de la Terre. Cette réflexion est notamment utilisée par les radio-amateurs....

A6a Un guide d'onde canalise une onde en limitant, par ses parois, les surfaces d'onde. L'onde se propage suivant la direction du guide qui permet ainsi de transmettre son énergie sur de longues distances.

Les limites imposées à l'extension de l'onde imposent elles-mêmes des conditions aux limites sur les grandeurs associées, ce qui a pour effet de rendre le guide dispersif. Les parois du guide, souvent idéalisées, peuvent être la cause d'une absorption de l'onde.

A6b Les guides d'onde électromagnétiques à section rectangulaire et à parois parfaitement conductrices en sont un exemple classique. Plus concrètement, les câbles coaxiaux, les fibres optiques, les tuyaux et pavillons sonores constituent des guides d'onde...

Dans cet exemple l'étendue de l'onde est limitée par l'espace entre les plans. Or celui-ci est largement supérieur à la longueur d'onde dans le vide illimité qui vaut 1 cm : on peut donc plutôt parler a priori de propagation libre.

B Elements de dynamique des fluides

B1a
$$\vec{a}(M,t) = \frac{\partial \vec{v}(M,t)}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad})\vec{v}(M,t)$$

Le premier terme représente l'accélération locale du fluide. Il traduit le fait que la vitesse des particules passant en un point donné de l'espace n'est pas toujours la même. Cette accélération s'annule en régime permanent.

Le deuxième terme représente l'accélération convective du fluide. Il traduit le fait que la vitesse des particules varie à un même instant d'un point à un autre de l'espace. L'accélération convective s'annule évidemment dans le cas d'un écoulement uniforme, mais aussi pour des écoulements laminaires où la vitesse ne varie qu'orthogonalement à sa direction (vitesses de la forme $\vec{v} = v(y,t)\vec{e}_x$ ou $\vec{v} = v(t,z)\vec{e}_z$ par exemple).

B1b Les lignes de courant sont les lignes de champ du champ des vitesses à un instant t_0 donné. Elles s'obtiennent à partir du champ des vitesses donné en coordonnées cartésiennes par exemple, par intégration en fonction des coordonnées d'espaces du système :

$$\frac{dx}{v_x(x,y,z,t_0)} = \frac{dy}{v_y(x,y,z,t_0)} = \frac{dz}{v_z(x,y,z,t_0)}$$

Les trajectoires représentent l'ensemble des points de l'espace atteints au cours du temps par les particules de fluide ; Elles s'obtiennent par intégration en fonction du temps du système :

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x,y,z,t) \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x,y,z,t) \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x,y,z,t)$$

En régime permanent, trajectoires et lignes de courant sont identiques.

Expérimentalement on peut visualiser lignes de courant et trajectoires en ajoutant dans le fluide des particules solides et en prenant des photographies à faible temps de pose (lignes de courant) ou fort temps de pose (trajectoires).

On peut également injecter un colorant en un point donné de l'écoulement : on visualise ainsi une ligne d'émission, ensemble des points occupés au cours du temps par toutes les particules étant passées par un même point de l'espace. En régime permanent, cette ligne d'émission coïncide encore avec une trajectoire ou une ligne de courant.

B1c Les lignes de courant sont données par intégration de :

$$\frac{dx}{\cos \omega t_0} = \frac{dz}{\sin \omega t_0} \Rightarrow z = x \tan \omega t_0 + K$$

Famille de droites parallèles, de pente $\tan \omega t_0$ à la date t_0

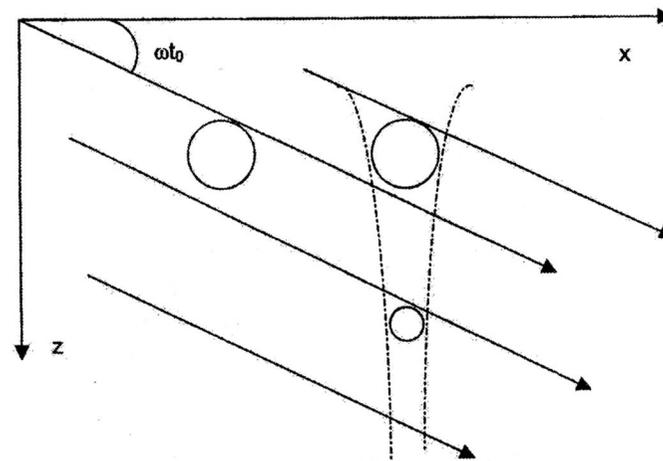
Au voisinage de $z = z_1$, les trajectoires s'obtiennent par intégration de :

$$\frac{dx}{dt} = V_0 e^{-\frac{z_1}{a}} \cos \omega t \Rightarrow x(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z_1}{a}} \sin \omega t + x_0$$

$$\frac{dz}{dt} = V_0 e^{-\frac{z_1}{a}} \sin \omega t \Rightarrow z(t) = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z_1}{a}} (1 - \cos \omega t) + z_0$$

en posant $x = x_0$ et $z = z_0$ à $t = 0$. Finalement, au voisinage de la cote z , les trajectoires sont des cercles d'équation :

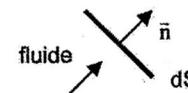
$$(x - x_0)^2 + (z - z_0 - R)^2 = R^2 \text{ avec } R = \frac{V_0}{\omega} e^{-\frac{z}{a}}$$



B2a La pression est d'origine est microscopique (vitesse microscopique des particules) et moléculaire (interaction entre les particules).

La pression en un point d'un fluide est matérialisée par l'existence d'une contrainte normale exercée sur une surface immergée dans le fluide en ce point, indépendante de sa direction (la pression est un scalaire) de sorte que :

$$\vec{dF} = PndS$$



La pression cinétique (positive) est associée à la variation de quantité de mouvement par unité de temps des particules qui frappent dS .

La pression moléculaire (négative) est associée aux interactions attractives moléculaires qui « retiennent » les particules.

B2b La pression s'exprime en pascals (Pa)

Exemples : - pression atmosphérique $P_{atm} \approx 1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$

- la pression dans l'eau augmente avec la profondeur d'1 bar tous les 10 m.

- pression artérielle $\approx 100 \text{ hPa}$

- pression au centre de la Terre $\approx 300 \text{ GPa}$

- vide extrême $P \leq 10^{-12} \text{ hPa}$

- surpression acoustique $P \in [3 \cdot 10^{-5}, 30] \text{ Pa}$

B2c $\vec{f}_p = -\text{grad}P$

B2d $\rho_0 \vec{g} - \text{grad}P = \vec{0}$

B2e Dans le référentiel terrestre R_T , non galiléen existent deux forces d'inertie :

- La force d'inertie d'entraînement qui en fait est déjà incluse dans la définition de \vec{g}

- La force d'inertie de Coriolis, de densité volumique :

$$\vec{f}_{icv} = -2\rho_0 \vec{\Omega}_T \wedge \vec{v}_{\text{dans } R_T}$$

Si le fluide est au repos, la force d'inertie de Coriolis est nulle : la relation du B2d est donc inchangée...

Si le fluide est en mouvement, outre qu'évidemment la somme des forces n'étant plus nulle l'équation d'équilibre devient l'équation d'Euler (voir plus loin question B5d), la force d'inertie de Coriolis intervient. Elle joue un rôle important dans la description des mouvements atmosphériques et océaniques par exemple...

B2f La résultante des forces de pression exercées par un fluide au repos sur un solide immergé est : $\vec{F}_A = -m_f \vec{g}$, où m_f est la masse de fluide déplacé par l'objet (masse du même volume de fluide).

Cette force est appliquée au centre de masse du fluide déplacé (centre de poussée).

Ce théorème n'est rigoureusement valable que dans un fluide au repos (d'après B2d) mais peut être appliqué pour de faibles mouvements relatifs de l'objet et du fluide (chute d'une bille dans un fluide visqueux par exemple)...

B3a Macroscopiquement, le phénomène de viscosité se traduit par un effet d'entraînement mutuel des particules fluides animées de vitesses différentes.

C'est en fait un phénomène d'origine microscopique, lié à une diffusion de quantité de mouvement dissipative et irréversible au sein du fluide.

En adoptant le modèle simple d'une vitesse de la forme $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$ (couches de fluides parallèles glissant les unes sur les autres), on obtient :



force tangentielle exercée sur la surface dS par la couche inférieure sur la couche supérieure

B3b La viscosité dynamique s'exprime en Pa.s (ou Poiseuille) :

- air $\eta \approx 10^{-5}$ Pa.s
- eau $\eta \approx 10^{-3}$ Pa.s
- huiles $\eta \approx 0,1$ à 10 Pa.s

B3c Viscosimètre à bille :

La mesure du temps de chute d'une bille dans un liquide visqueux, bille soumise à une force de frottement fluide proportionnelle à η , permet de remonter à la valeur de η .

Viscosimètre de Couette :

La mesure du couple proportionnel à η , exercé sur un cylindre placé dans un liquide visqueux en écoulement, et par exemple suspendu à un fil de torsion, permet de remonter à la valeur de η .

Viscosimètre à écoulement :

La mesure du débit, inversement proportionnel à η dans un écoulement de Poiseuille, permet encore de déterminer la valeur de la viscosité dynamique (voir questions B3g à B3k).

B3d $\vec{f}_v = \eta \Delta \vec{v}$. La force massique correspondante est : $\vec{f}_m = \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v} = \nu \Delta \vec{v}$ où ν est la viscosité cinématique qui tire son nom de son unité en $m^2.s^{-1}$ (viscosité qui représente une diffusivité de quantité de mouvement).

B3e ν s'exprime en $m^2.s^{-1}$, V en $m.s^{-1}$ et L en m. On peut donc écrire :

$$R_e = \frac{LV}{\nu}$$

B3f $R_e = \frac{\text{énergie volumique liée à la convection}}{\text{énergie volumique liée à la diffusion}} = \frac{\rho V^2}{\eta \frac{V}{L}} = \frac{LV}{\nu}$

Ou $R_e = \frac{\text{temps caractéristique diffusif}}{\text{temps caractéristique convectif}} = \frac{L^2/\nu}{L/V} = \frac{LV}{\nu}$

On pourrait encore citer : $R_e = \frac{\text{terme convectif de l'équation de Navier - Stokes}}{\text{terme visqueux de l'équation de Navier - Stokes}} = \frac{V \frac{L}{L}}{\nu \frac{V}{L^2}}$

Dans tous les cas, R_e permet d'évaluer l'importance relative de la convection et de la diffusion (c'est-à-dire de la viscosité) : plus le nombre de Reynolds est élevé, moins la viscosité intervient dans l'écoulement du fluide.

B3g L'écoulement est permanent, la photo visualise aussi bien les lignes de courant que les trajectoires, auxquelles on peut associer le modèle mathématique de l'écoulement potentiel d'un fluide parfait. Or, à l'écoulement d'un fluide parfait, c'est-à-dire sans viscosité, doit être associé un nombre de Reynolds a priori infini.

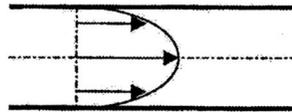
Dans cet écoulement au contraire, la petite valeur du nombre de Reynolds indique que la viscosité doit jouer un rôle essentiel dans l'écoulement, ce qui semble donc paradoxal.

En fait, la viscosité intervient bien et on a un écoulement de type Poiseuille entre les deux plaques : c'est la vitesse moyenne parallèle aux plaques qui dérive d'un potentiel d'ailleurs directement lié à la viscosité. La vitesse du fluide s'annule bien au contact de l'obstacle : il existe une couche limite d'épaisseur très faible en son voisinage.

B3h Le modèle de Poiseuille correspond à l'écoulement permanent et laminaire d'un fluide visqueux sous l'effet d'un gradient de pression.

En symétrie cylindrique, dans un tube de rayon R , le modèle conduit à un profil de vitesses parabolique, de la forme :

$$v = v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$



B3i Dans cet écoulement laminaire, le terme convectif de l'équation de Navier-Stokes est structurellement nul : l'évaluation du nombre de Reynolds ne peut donc servir à décider de l'importance relative de la convection et de la viscosité. La encore, des nombres de Reynolds relativement importants peuvent être associés à des écoulements de visqueux de type Poiseuille.

Néanmoins, pour des valeurs plus élevées de R_e apparaissent des instabilités qui conduisent à des écoulements turbulents n'obéissant plus au modèle de Poiseuille. Le « seuil » d'instabilité est purement expérimental. C'est par rapport à lui que l'évaluation du nombre de Reynolds permet de valider le modèle de l'écoulement permanent de Poiseuille...

B3j Le temps caractéristique de diffusion est $\frac{d^2}{4\nu}$: il correspond à l'établissement d'une couche limite égale au rayon du tube. La longueur parcourue par le fluide dans le tube pendant ce temps est donc de l'ordre de :

$$\ell \approx \frac{v_0 d^2}{4\nu} = \frac{8Q d^2}{\pi d^2 4\nu} = \frac{ghd^4}{64\nu^2 L}$$

(la vitesse moyenne débitante est $\frac{v_0}{2}$)

B3k $Q_i = \frac{m_i}{\rho t} \Rightarrow \ell_i = \frac{2m_i}{\pi \eta t}$ et $\eta_i = \frac{\pi \rho g h d_i^2 \rho t}{128 L m_i}$

- tube 1 : $\ell_1 = 0,13 \text{ mm}$ $\eta \approx 10^{-3} \text{ Pa.s}$

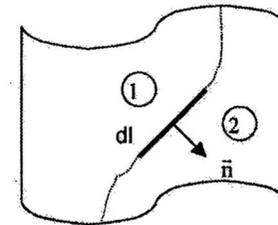
- tube 2 $\ell_2 = 2 \text{ mm}$ idem

Les résultats obtenus confirment la validité du modèle et sont cohérents avec les valeurs tabulées de la viscosité de l'eau...

B4a Il s'agit de phénomènes de surface se produisant à l'interface entre deux fluides ou entre un fluide et un solide. Le phénomène de capillarité tire son nom de l'ascension d'un liquide dans un tube « fin » alors dénommé tube capillaire.

Tous ces phénomènes sont dus aux interactions moléculaires entre molécules proches de la surface. Ils se modélisent par des forces de surface de la forme :

$\vec{dF} = A d\vec{n}$ force exercée sur l'élément $d\vec{l}$ par la partie 2 du fluide sur la partie 1 : A est appelée constante de tension superficielle du fluide.



B4b Le travail élémentaire reçu par le fluide lors d'une augmentation dS de sa surface est $\delta W = A dS$

Pour minimiser son énergie, le fluide tend donc à minimiser sa surface :

- Forme sphérique d'une goutte de volume donné dans un espace isotrope
- Formes des lames de fluide s'accrochant sur des objets tels qu'un cube en « fil de fer »...

B4c Quelques exemples :

- Méthode d'arrachement (utilisant une balance de même nom) :

La mesure de la force nécessaire pour « arracher » une lame métallique « retenue » par

la surface d'un liquide grâce aux forces de tension superficielle permet d'atteindre la valeur de la constante A de ce liquide.

- Méthode stalactométrique :

La mesure de la masse d'un nombre donné de gouttes tombant d'une pipette par gravité permet, en comparant leur poids et la force de tension superficielle qui les retiennent à la pipette, de déterminer A ; Cette méthode est surtout utilisée pour comparer les constantes de liquides différents.

- Utilisation de la loi de Jurin :

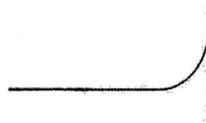
Celle-ci régit la hauteur d'ascension d'un liquide dans un tube capillaire de diamètre donné : la mesure de cette hauteur permet de revenir à la valeur de A.

B4d A s'exprime en $N.m^{-1}$ (soit en $kg.s^{-2}$), g en $m.s^{-2}$, et ρ_0 en $kg.m^{-3}$. D'où :

$$l_c = \sqrt{\frac{A}{\rho_0 g}} = 2,7 \text{ mm pour l'eau}$$

Cette longueur capillaire représente une distance caractéristique permettant, par comparaison avec d'autres longueurs caractéristiques d'un problème, d'évaluer l'importance des phénomènes de tension superficielle.

Une grosse goutte de liquide posée sur une surface plane horizontale aura une épaisseur caractéristique de l'ordre de l_c . Un liquide se rattachant à une paroi verticale aura une hauteur d'ascension de l'ordre de l_c .



B4e

$$\Delta P_1 = \frac{2A}{R}$$

B4f

$$\Delta P_1 = \rho_0 g 2R$$

B4g

$$B_0 = \frac{\Delta P_2}{\Delta P_1} = \frac{\rho_0 g R^2}{A} = \left(\frac{R}{l_c}\right)^2$$

Ce nombre permet de comparer les effets de gravité et de capillarité. Lorsque B_0 est égal à 1, le rayon de la goutte est égal à la longueur capillaire l_c ...

B5a

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad \text{Equation de conservation de la masse}$$

B5b

Dans un écoulement incompressible une particule de fluide de masse donnée garde le même volume tout au long de son mouvement. D'où :

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \rho = 0$$

Soit finalement :

$$\text{div} \vec{v} = 0$$

Au resserrement des lignes de courant correspond une augmentation de la vitesse.

$$\text{B5c} \quad dm \vec{a} = \sum d\vec{f} \Rightarrow \rho \frac{D\vec{v}}{Dt} dt = \vec{f}_i dt$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = \vec{f}_i - \text{grad} P$$

en particulierisant le rôle des forces de pression

B5d

Les grandeurs à déterminer en tout point et à tout instant sont ρ , P et \vec{v} , soit 5 inconnues scalaires, pour 4 équations (conservation de la masse et trois projections de l'équation d'Euler).

Il manque donc a priori une équation qui sera une équation de « comportement » du fluide :

Pour un fluide homogène incompressible par exemple, $\rho = \text{cste}$, et les 4 équations précédentes sont suffisantes pour 4 inconnues.

Dans le cas d'écoulements compressibles, une équation d'état du fluide fournit une relation du type : $f(P, \rho, T) = 0$.

Apparaît alors une inconnue supplémentaire T, d'où la nécessité de supposer un comportement thermodynamique du fluide. Par exemple :

- comportement isotherme $T = T_0$ qui supprime l'inconnue T

-comportement isentropique qui fournit une équation supplémentaire.

Cette dernière hypothèse suppose évidemment des évolutions réversibles excluant entre autres les phénomènes de viscosité ou de diffusion thermique...

B5e Pour un gaz parfait en évolution isentropique : $P\rho^{-\gamma} = \text{cste} \Rightarrow \frac{dP}{P} - \gamma \frac{d\rho}{\rho} = 0$

Soit : $\chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{M}{\gamma \rho R T}$. Pour un gaz diatomique $\gamma = 1,4$. Numériquement, à P_0 :

$$\chi_s = 7,1 \cdot 10^{-6} \text{ Pa}^{-1}$$

C Ondes acoustiques

C1a Dans l'approximation acoustique les grandeurs δP , $\delta \rho$ et v vitesse du fluide sont supposées « petites » de sorte que l'on puisse linéariser les équations au premier ordre.

Pour l'oreille humaine les surpressions acoustiques varient de $3 \cdot 10^{-5}$ Pa (seuil d'audition) à 30 Pa (seuil de douleur).

C1b
$$\frac{\partial p}{\partial t} + \text{div}(p\vec{v}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial(\delta p)}{\partial t} + \rho_0 \text{div}\vec{v} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v} \right] = -\text{grad} P \Rightarrow \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\delta P) \quad (2)$$

$$\chi_s = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial P} \right)_s \Rightarrow \rho_0 \chi_s = \frac{\delta p}{\delta P} \quad (3)$$

(3) et (1) $\Rightarrow \chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \text{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial^2(\delta P)}{\partial t^2} + \text{div}\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\right) = 0$

Puis, en utilisant (2) :

$$\Delta(\delta P) - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2(\delta P)}{\partial t^2} = 0$$

soit une célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$.

Dans le modèle du gaz parfait, $\chi_s = \frac{1}{\gamma P} = \frac{M}{\gamma \rho R T}$ (voir question B5e). D'où $c = \sqrt{\frac{\gamma R T}{M}}$.

La célérité des ondes acoustiques dans les gaz (typiquement 340 m.s⁻¹ dans l'air) est inférieure à celle trouvée dans les liquides (de l'ordre de 1500 m.s⁻¹ dans l'eau), elle-même inférieure à la célérité des ondes acoustiques dans les solides...

C1c La mise en équation des ondes acoustiques précédente suppose le fluide sans viscosité et ne prend pas en compte les phénomènes de diffusion thermique.

C1d
$$\chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \text{div}\vec{v} = 0 \Rightarrow \chi_s \delta P \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \delta P \text{div}\vec{v} = 0 \quad (4)$$

$$\rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\text{grad}(\delta P) \Rightarrow \rho_0 \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(\delta P) = 0 \quad (5)$$

$$(4) + (5) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \chi_s (\delta P)^2 + \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \right) + \text{div}(\delta P \vec{v}) = 0$$

Il s'agit d'une équation locale de conservation de l'énergie. Le premier terme représente la variation temporelle locale d'énergie volumique, elle-même composée de énergie volumique des forces de pression et énergie volumique cinétique. Le second fait apparaître un « vecteur de Poynting » des ondes acoustiques dont le flux à travers une surface fermée représente la puissance acoustique traversant cette surface.

On retrouve évidemment une équation analogue en électromagnétisme :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) + \text{div} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right) = 0$$

Mais on pourrait citer aussi :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} L i^2 + \frac{1}{2} C u^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (ui) = 0$$

Equation locale de conservation de l'énergie dans un ligne électrique unidimensionnelle

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \mu v^2 + \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x} (T_y v) = 0$$

Equation locale de conservation de l'énergie dans une corde tendue etc, etc...

C1e Pour une onde plane progressive dans le sens des x croissants, surpression et vitesse sont de la forme : $\delta P(t - \frac{x}{c})$ et $\vec{v} = v(t - \frac{x}{c}) \vec{e}_x$

(2) $\Rightarrow \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial(\delta P)}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} \Rightarrow \delta P = \rho_0 c v$ en excluant tout terme stationnaire.

D'où $Z = \rho_0 c$

C1f L'intensité moyenne de l'onde acoustique est sa puissance surfacique moyenne $I = \langle \delta P v \rangle$ (Cf. C1d). Pour l'onde proposée :

$$\delta P v = \rho_0 c v^2 = \rho_0 c v_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \quad \text{soit} \quad I = \frac{1}{2} \rho_0 c v_0^2$$

C1g $I_0 = \frac{1}{2} \rho_0 c \omega^2 (\Delta x)^2 = 2\pi^2 f^2 \rho_0 c (\Delta x)^2$. D'où : $\Delta x = \frac{1}{\pi f} \sqrt{\frac{I_0}{2\rho_0 c}} \approx 24 \text{ pm}$

C1h $I_{ab} = 10 \log \frac{I}{I_0}$ $I_5 = 120 \text{ dB}$

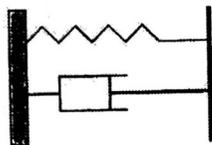
C1i Un gain de -11 dB correspond à une intensité réelle divisée par 12,5 ce qui semble justifier l'augmentation de prix. Encore faut il tenir compte de la courbe de réponse de l'oreille humaine qui est elle-même logarithmique !

C2a $Z = 0 \Rightarrow \delta P = 0$ tuyau ouvert sur un milieu extérieur de pression constante P_0

Z infinie $\Rightarrow v = 0$ tuyau fermé sur un fond rigide.

$Z = Z_c \Rightarrow$ tuyau fermé sur son impédance caractéristique.

Celle-ci pourrait être modélisée par un piston de masse m , associé à un ressort de raideur k et un amortisseur de constant h selon le schéma :



L'impédance mécanique de ce système est : $Z = h + j(m\omega - \frac{k}{\omega})$. $Z = Z_c$ implique donc

$$h = Z_c \text{ et } \frac{k}{m} = \omega^2$$

Avec $Z = 0$, $r = -1$ pour la surpression et $r' = 1$ pour la vitesse. Avec Z infinie c'est le contraire. Avec $Z = Z_c$ $r = r' = 0$.

$$\begin{aligned} \text{C2b} \quad \delta P_i + \delta P_r = \delta P_t & \Rightarrow 1 + r = t \\ v_i + v_r = v_t & \Rightarrow 1 - r = \frac{Z_1}{Z_2} t \quad \text{avec } Z_i = \rho_0 c_i \end{aligned}$$

$$\text{C2c} \quad r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \text{ et } t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

$$\text{C2d} \quad I_i = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_i^2}{Z_1} \right\rangle \quad I_r = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_r^2}{Z_1} \right\rangle \quad I_t = \left\langle \frac{1}{2} \frac{\delta P_t^2}{Z_2} \right\rangle$$

$$R = \frac{I_r}{I_i} = r^2 = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2 \quad T = \frac{I_t}{I_i} = \frac{Z_1}{Z_2} t^2 = \frac{4Z_1 Z_2}{(Z_2 + Z_1)^2}$$

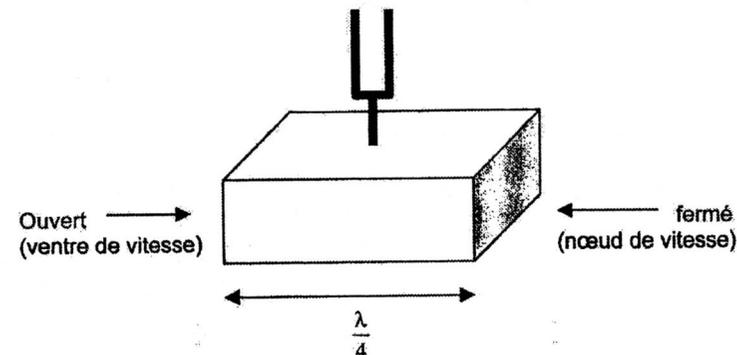
$R + T = 1$ correspond à la conservation de l'énergie transportée par l'onde incidente.

C2e $T \approx 1,8 \cdot 10^{-3}$ la transmission est mauvaise et nécessite une adaptation d'impédance : c'est le rôle du stéthoscope.

C2f C'est le principe de la couche anti-reflet : on intercale entre les deux milieux 1 et 2 une couche d'épaisseur e d'un milieu d'impédance caractéristique Z_0 , où se produisent des réflexions/transmissions multiples. En jouant sur e et Z_0 , on peut diminuer voire en théorie annuler r .

C'est le rôle de la couche de gel utilisée dans l'échographie par ultrasons. C'est bien sûr aussi celui de la couche anti-reflet des verres optiques.

C2g Il s'agit encore d'une adaptation d'impédance par cavité résonante accordée sur la fréquence propre du diapason selon le schéma :



$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f} = 19 \text{ cm}$. En réalité il y a des effets de bord au niveau de l'ouverture qui ne correspondent pas exactement à $Z = 0$, d'où une correction sur L ...

C2h Pour l'oreille le même modèle donne : $f = \frac{c}{4l} = 3400 \text{ Hz}$

C2i La salle constitue à nouveau une cavité résonante imposant à la surpression une forme d'onde stationnaire dans les 3 directions, avec un ventre sur chaque paroi. Soit :

$$\delta P = A \cos k_x x \cdot \cos k_y y \cdot \cos k_z z \cdot \cos \omega t$$

avec $k_x L_x = m\pi$, $k_y L_y = n\pi$ et $k_z L_z = p\pi$. L'équation de propagation impose alors la relation :

$$-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

D'où $f^2 = \frac{c^2}{4} \left(\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2} + \frac{p^2}{L_z^2} \right)$. Les valeurs permises de f peuvent être d'autant plus faibles que les dimensions de la salle sont importantes : une cathédrale permet de faire résonner de plus basses fréquences.

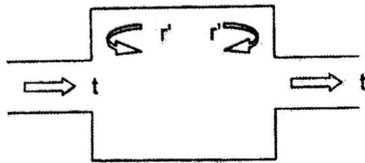
C3a Pour un changement de section les relations de continuité deviennent :

$$\begin{aligned} \delta P_i + \delta P_r = \delta P_t & \Rightarrow 1 + r = t \\ s(v_i + v_r) = S v_t & \Rightarrow 1 - r = \frac{S}{s} t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où :} \quad - \text{ passage } s \rightarrow S & \quad r = \frac{s-S}{s+S} & \quad t = \frac{2s}{s+S} \\ - \text{ passage } S \rightarrow s & \quad r' = -r & \quad t' = \frac{S}{s} t \end{aligned}$$

C3b Le coefficient de transmission global est

$$T = tt'(1 + r^2 e^{2ikL} + (r^2 e^{2ikL})^2 + (r^2 e^{2ikL})^3 + \dots)$$

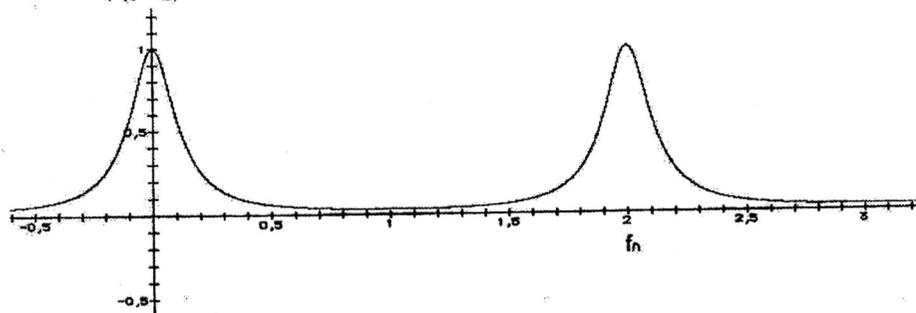


Soit $T = \frac{tt'}{1 - r^2 e^{2ikL}}$ et enfin $T = T \cdot T^*$

Tous calculs faits, il vient : $T = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi fL}{c}}$ soit $f_0 = \frac{c}{2L}$

C3c $T_{Max} = 1$ pour $f = nf_0$ (ce qui correspond à $L = n \frac{\lambda}{2}$ cavité résonante)

$T_{min} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S}\right)^2}$ pour $f = (n + \frac{1}{2}) f_0$. Si $S \gg s$ $T_{min} \approx 4 \left(\frac{s}{S}\right)^2 \ll 1$.



Ce système est analogue à l'interféromètre de Fabry-Pérot en optique...

C3d $T(f) = \frac{1}{2}$ pour f telle que $\frac{1}{2} \left(\frac{S}{s} - \frac{s}{S}\right)^2 \sin^2 \frac{2\pi fL}{c} = 1$ soit $f = \frac{f_0}{\pi} \text{Arcsin} \frac{2}{\frac{S}{s} - \frac{s}{S}} = \Delta f$

On définit alors $Q = \frac{f_0}{2\Delta f} = \frac{\pi}{2 \text{Arcsin} \frac{2}{\frac{S}{s} - \frac{s}{S}}}$ Si $S \gg s$ $Q \approx \frac{\pi S}{4s} \gg 1...$

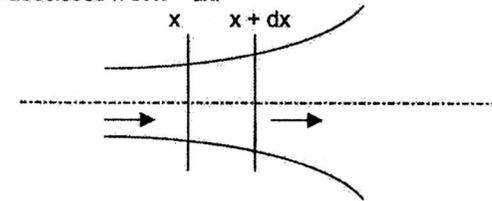
C3e L'idéal consiste à ne retenir que des fréquences basses audibles : on choisit f_0 (donc L) en dehors du spectre audible de l'oreille, et le rapport des sections de sorte à affiner le pic origine (on a en quelque sorte constitué un filtre passe-bas) .

C4a Le fluide ne peut avoir de composante de vitesse orthogonale aux parois du pavillon.

C4b La section du pavillon doit varier « lentement ». Plus précisément, la longueur d'onde doit vérifier :

$$\lambda_0 \ll a$$

C4c L'équation locale de conservation de la masse doit être ici remplacée par une équation bilan de masse sur une « tranche » de pavillon comprise entre les abscisses x et x + dx.



Pendant un temps élémentaire dt :

δm_e « entrante » : $\delta m_e = [\rho sv](x) dt$
 δm_s « sortante » : $\delta m_s = [\rho sv](x + dx) dt$
 δm_i « interne » : $\delta m_i = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt S dx$

$\delta m_i = \delta m_e - \delta m_s \Rightarrow S \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} (\rho Sv)$. Soit, après linéarisation :

$S \frac{\partial(\delta \rho)}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial}{\partial x} (Sv) = 0 \Rightarrow \chi_s \frac{\partial(\delta P)}{\partial t} + \frac{1}{S} \frac{\partial}{\partial x} (Sv) = 0$

C4d Avec l'expression de vitesse proposée, l'équation précédente devient :

$$-i\omega \chi_s \delta P + ikv + \frac{v}{a} = 0$$

En outre, l'équation d'Euler linéarisée (équation (2) du C1b) donne ici : $i\omega \rho_0 v = ik \delta P$

D'où $-i\omega \chi_s \frac{\omega}{k} \rho_0 v + ikv + \frac{v}{a} = 0$, qui donne finalement la relation demandée : $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 - \frac{ik}{a}$

C4e Cette relation de dispersion se met sous la forme :

$$\left(k - \frac{i}{2a}\right)^2 = \frac{\omega^2 - \omega_c^2}{c^2} \text{ avec } \omega_c = \frac{c}{2a}$$

Si $\omega < \omega_c$, k est imaginaire pure et il ne peut y avoir propagation. Le pavillon permet donc la propagation d'ondes de fréquence supérieure à $f_c = \frac{c}{4\pi a}$

C4f A l'extrémité du pavillon, il y a transmission et réflexion de l'onde acoustique : la transmission sera d'autant meilleure que la section de sortie sera grande. Le pavillon réalise en fait une approche d'adaptation d'impédance au milieu extérieur et la voix est mieux transmise...

C4g La relation entre k et ω n'est pas linéaire, le pavillon est évidemment dispersif. Le fait que k comporte une partie imaginaire pourrait laisser penser qu'il est aussi absorbant. En fait, la puissance acoustique traversant une section S du pavillon s'écrit $\delta P S v$ avec $v = \frac{k}{\omega \rho_0} \delta P$.

Mais k est complexe : v comporte un terme en phase avec δP (par l'intermédiaire de $\text{Re}(k)$) et un terme en quadrature (par l'intermédiaire de $\text{Im}(k)$) donnant une valeur moyenne nulle. La puissance moyenne est alors :

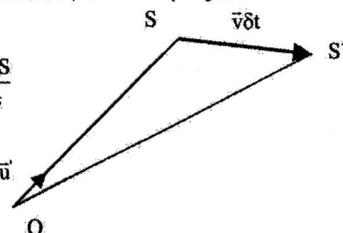
$$\langle P \rangle = S \frac{\text{Re}(k) \delta P_0^2}{\omega \rho_0} \frac{1}{2} \text{ où } \delta P_0 \text{ est l'amplitude de variation de } \delta P.$$

Cette amplitude comporte elle-même un terme d'atténuation en $e^{-\frac{x}{2a}}$, provenant de la partie imaginaire de k , donc δP_0^2 varie en $e^{-\frac{x}{a}}$. Cette atténuation est compensée par la variation de S en $e^{\frac{x}{a}}$: La puissance moyenne à travers une section S est indépendante de x , le pavillon n'est pas absorbant...

C4h La dispersion entraîne une déformation de la voix transmise.

C5a L'effet Doppler consiste en une différence entre la fréquence d'une onde émise par une source dans son propre référentiel, et celle perçue dans un référentiel où elle est en mouvement.

C5b A $t = 0$, S émet un bip reçu en O à $t_1 = \frac{OS}{c}$
A $t = \delta t$, S (en S') émet un bip reçu en O à $t_2 = \delta t + \frac{OS'}{c}$



Or : $\overline{SS'} = \vec{v} \delta t = d(\overline{OS}) = d(OS \vec{u}) = \vec{u} \cdot d(OS) + OS d(\vec{u})$ ou \vec{u} est un vecteur unitaire

Soit $\vec{u} \cdot d(\overline{OS}) = d(OS) = \vec{u} \cdot \vec{v} \delta t$

Enfin $\delta t' = t_2 - t_1 = \delta t + \frac{OS' - OS}{c} = \delta t + \frac{d(OS)}{c} = \delta t + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v} \delta t}{c}$. Avec $\vec{u} = -\vec{u}$, on obtient :

$$\delta t' = \delta t \left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c} \right)$$

Ce calcul suppose qu'on puisse traiter SS' comme un infiniment petit d'ordre 1 par rapport à OS , soit $v \delta t \ll OS$

C5c La fréquence joue ici le rôle de $\frac{1}{\delta t}$. D'où : $f' = \frac{f}{\left(1 - \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{c} \right)}$



Quand la source se rapproche de O , $f' > f$ et au contraire $f' < f$ quand elle s'éloigne. La fréquence d'une sirène d'ambulance émet un son plus aigu si elle se rapproche et plus grave lorsqu'elle s'éloigne.

C5d Dans le cas limite où $\vec{u} \cdot \vec{v}$ tend vers c , $\delta t'$ tend vers 0, des sons émis à des instants différents parviennent ensemble...

C5e On peut citer l'élargissement Doppler des raies d'une lampe à vapeur de mercure haute pression par exemple, ou le décalage vers le rouge du spectre des étoiles...

D1a Un écoulement potentiel est tel que $\text{Rot} \vec{v} = \vec{0}$. On peut alors associer au champ des vitesses un potentiel Φ tel que $\vec{v} = \text{grad} \Phi$.

Si de plus l'écoulement est incompressible, $\text{div} \vec{v} = 0$ et le potentiel Φ vérifie : $\Delta \Phi = 0$

D1b Entre 2 points A et B quelconques, on peut écrire :

$$\int_A^B \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \cdot d\vec{l} + \int_A^B \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{v} \wedge \text{Rot} \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{g} \cdot d\vec{l} - \int_A^B \text{grad} \left(\frac{P}{\rho} \right) \cdot d\vec{l}$$

Compte tenu de $\vec{v} = \text{grad} \Phi$, $\text{Rot} \vec{v} = \vec{0}$ et $\vec{g} = -\text{grad}(gy)$, et en négligeant les termes de second ordre :

$$\forall A, B \quad \int_A^B \text{grad} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0} \right) \cdot d\vec{l} = 0$$

Soit $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0} = F(t)$

D1c A $F(t)$ on peut associer la fonction $G(t)$ telle que $F(t) = \frac{dG(t)}{dt} + K$ et la

relation précédente devient : $\frac{\partial(\Phi - G(t))}{\partial t} + gy + \frac{P}{\rho_0} = K$ où K est une constante.

Le champ des vitesses associé au nouveau potentiel $\psi = \Phi - G(t)$ reste le même puisque $\text{grad}(\Phi - G(t)) = \text{grad} \Phi$.

D1d En maintenant l'appellation Φ pour le nouveau potentiel des vitesses, et en utilisant l'équation (1), il vient, en $y = h - h_0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gh - A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = K' \quad \text{soit encore} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} + gh - A \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = K'$$

IL est possible d'obtenir une équation ne faisant intervenir que Φ , en remarquant que $\frac{\partial h}{\partial t} = v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ en $y = h - h_0$ et en dérivant partiellement par rapport au temps l'équation précédente :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial y} - A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) = 0 \quad \text{en } y = h - h_0$$

D2a Le terme $f(x-ct)$ correspondrait à une onde plane se propageant à la célérité c dans la direction des x positifs.

Le terme $g(y)$ correspond à une amplitude dépendant de la profondeur y .

L'équation $\Delta \Phi = 0$ donne $\frac{f''}{f} + \frac{g''}{g} = 0$, où f'' et g'' désignent les dérivées secondes respectives de f et g par rapport à x et y .

Soit $\frac{f''}{f} = -\frac{g''}{g} = -k^2$ où k est une constante. Le signe moins vient du fait que la fonction $g(y)$ doit pouvoir tendre vers 0 quand y devient infini (fluide au repos à une profondeur « infinie »). Alors :

$$g(y) = Be^{ky} + Ce^{-ky}$$

et $f(x-ct) = f_0 e^{i(kx-\omega t)}$ avec $c = \frac{\omega}{k}$

D2b $v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ doit s'annuler en $y = -h_0$, soit :

$$kBe^{-kh_0} - kCe^{+kh_0} = 0 \Rightarrow B = Ce^{+2kh_0}$$

$$\Phi(x, y, t) = \Phi_0 \text{ch}[k(y+h_0)] e^{i(kx-\omega t)}$$

D2c Au niveau de la surface libre :

$$v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = k\Phi_0 \text{sh}[k(y+h_0)] e^{i(kx-\omega t)} \approx k\Phi_0 \text{sh}[kh_0] e^{i(kx-\omega t)}$$

en assimilant h à sa valeur moyenne h_0 .

Enfin par intégration et retour à la notation réelle : $h(x, t) = h_0 - \frac{\Phi_0}{c} \text{sh}[kh_0] \sin(kx - \omega t)$. La surface libre présente un profil sinusoïdal autour de l'altitude de repos h_0 .

D2d En utilisant la relation trouvée sur F au D1d, il vient :

$$-\omega^2 \Phi_0 \text{ch}(kh_0) e^{i(kx-\omega t)} + k\Phi_0 \left(g + \frac{Ak^2}{\rho_0} \right) \text{sh}(kh_0) e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

soit, avec $\omega^2 = k^2 c^2$ et tous calculs faits :

$$c^2 = gh_0 \frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \left(1 + \frac{Ak^2}{\rho_0 g} \right)$$

On retrouve bien la relation demandée en posant $l_c = \sqrt{\frac{A}{\rho_0 g}}$...

D3a la parenthèse $(1 + kl_c^2)$ fait intervenir deux termes :

- Si $kl_c \ll 1$ la gravité prédomine
- Si $kl_c \gg 1$ la capillarité prédomine.

La frontière entre les deux domaines est caractérisée par $kl_c = 1$, qui correspond à une longueur d'onde λ_m telle que :

$$\lambda_m = 2\pi l_c \approx 18 \text{ mm}$$

D3b Si $kl_c \ll 1$ $c^2 \approx \frac{g}{k} \tanh(kh_0)$

Si $kl_c \gg 1$ $c^2 \approx gkl_c^2 \tanh(kh_0)$

Dans ce dernier cas, la profondeur h_0 étant, en général, supérieure à la longueur capillaire l_c , la condition $kl_c \gg 1$ implique a fortiori que $kh_0 \gg 1$ et $\tanh(kh_0) \approx 1$. La formule prend alors la forme simplifiée :

$$c^2 \approx gkl_c^2$$

D3c Les rides fines sont des rides capillaires (petite longueur d'onde) :

$$c = l_c \sqrt{\frac{2\pi g}{\lambda}} \approx 53 \text{ cm.s}^{-1}$$

Les rides plus espacées correspondent à des ondes de gravité de célérité :

$$c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 28 \text{ cm.s}^{-1}$$

D4a $kl_c = X \frac{l_c}{h_0} \leq 5 \frac{l_c}{h_0} \ll 1$ La capillarité peut être négligée...

D4b $X = 1$ sépare à nouveau deux domaines :

- $X < 1$ $\lambda > h_0$ eau peu profonde
- $X > 1$ $\lambda < h_0$ eau profonde

D4c En eau profonde, on a très vite $\tanh(kh_0) \approx 1$ et c prend la valeur approchée :

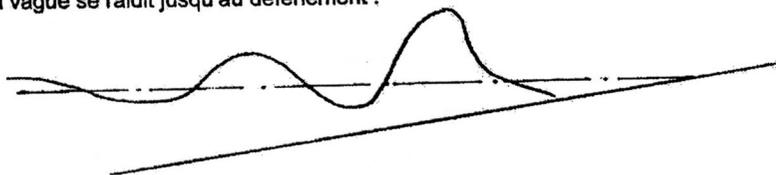
$$c \approx \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \approx 2,8 \text{ m.s}^{-1}$$

D4d $k = \frac{\omega^2}{g}$ le milieu est bien dispersif.

$$dk = \frac{2\omega d\omega}{g} \Rightarrow v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} = \frac{1}{2} \frac{\omega}{k} = \frac{v_p}{2}$$

D5a A faible profondeur, $\frac{\tanh(kh_0)}{kh_0} \rightarrow 1$ et $c \approx \sqrt{gh_0}$

La célérité ne dépend plus de la fréquence de l'onde mais seulement de la profondeur : au voisinage du rivage, quand celle-ci diminue, la célérité diminue également : le front de la vague se raidit jusqu'au déferlement :



D5b $\frac{dc}{dh_0} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}} \Rightarrow \delta c_1 = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{h_0}}$ On observe là encore un raidissement du front de la vague.

D5c La dispersion étale au contraire la vague. A sa largeur L correspond une étendue « spectrale » $\Delta k \approx \frac{1}{L}$

On alors
$$\delta c_2 \approx \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{6L^2}$$

D5d Les deux effets se contraignent et peuvent se compenser si $\delta c_1 = \delta c_2$.

En raisonnant en ordres de grandeur, on obtient :

$$H \sqrt{\frac{g}{h_0}} \approx \sqrt{gh_0} \frac{h_0^2}{L^2} \Rightarrow H \approx \frac{h_0^3}{L^2}$$

D5e Numériquement $H \approx 1$ m et $c \approx 5,4 \text{ m.s}^{-1} \approx 20 \text{ km.h}^{-1}$

Agrégation de sciences physiques

Concours externe

OPTION PHYSIQUE

Composition de chimie ♦ Session : 2004

Les solides en chimie

I. Cohésion dans les solides

I.1. Propriétés physiques des corps purs

I.1.1. Corps pur = une seule espèce chimique

I.1.2. Etat solide : molécules en interaction et en position fixe ; état liquide ; molécules en interaction mais en mouvement ; état gazeux : molécules en mouvement avec peu d'interactions autre que collisions.

I.1.3. Diagramme de phase $p = f(T)$ d'un corps pur.

a. Figure ci-contre

b. $v = c + 2 - \varphi$

c. Variance :

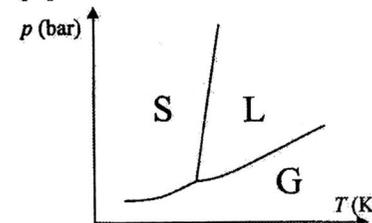
- Domaines : $v = 2$

- Frontières : $v = 1$

- au point t : $v = 0$

d. Frontières : équilibre entre deux phases ; au point t : équilibre entre les trois phases

e. Point c : fluide unique où la densité du gaz est égale à la densité du liquide.



I.1.4.

a. $dG = VdP - SdT$

b. $d\mu = V_m dP - S_m dT$

c. $\mu(\phi_1) = \mu(\phi_2)$

d. $\frac{dP}{dT} = \frac{\Delta S_m}{\Delta V_m}$

e. ΔV_m est plus petit dans le cas solide-liquide.

f. $\Delta V_m < 0$ Donc la pente est négative (car $\Delta S_m > 0$)

g. Structure lacunaire de la glace $\Rightarrow \Delta V_m < 0$.

I.2. Energie de liaison des cristaux ioniques

I.2.1. Liaison ionique. L'énergie réticulaire U est la variation d'énergie du processus : $\text{NaCl}_{(s)} \rightarrow \text{Na}^+_{(g)} + \text{Cl}^-_{(g)}$.