

Avertissement

Ce recueil des solutions de la plupart des épreuves écrites des concours de recrutement de professeurs en physique et chimie est destiné à faciliter le travail de toutes les personnes intéressées par ces épreuves et notamment des candidats à ces concours.

Nous remercions les collègues qui ont accepté de se charger de la rédaction des solutions. Ces solutions peuvent être plus ou moins détaillées selon les épreuves. En aucun cas elles ne constituent un modèle des méthodes ni des rédactions que les jurys pourraient souhaiter mais une simple aide permettant en particulier de contrôler la validité des résultats.

Ces épreuves de concours peuvent fournir l'occasion de prolongements et d'approfondissements qu'il n'est généralement pas possible aux auteurs de signaler ici autrement que par une bibliographie sommaire. Les candidats aux concours doivent pouvoir trouver ces incitations à d'intéressantes études en participant aux préparations ouvertes dans les différentes académies.

Afin de faciliter l'utilisation de ce numéro spécial, son service est inclus dans l'abonnement collectifs, tout en demeurant hors abonnement individuel. Il en est de même pour le numéro spécial comportant les énoncés correspondants. Les numéros des concours sont disponibles par correspondance au siège de l'UdP.

André BOUSSIE et Françoise ROGER
Coordonnateurs des Bulletins sur les Concours

Agrégation (Concours Externe)

OPTION : PHYSIQUE

Composition de physique - Session : 1999

PARTIE A : EFFETS DE MARÉE

1 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique ; mise en évidence des effets gravitationnels différentiels

1.1 Référentiels

1. Référentiel galiléen

- (a) Dans des référentiels différents, les lois d'un même mouvement prennent une forme plus ou moins compliquée ; en particulier un corps n'interagissant avec aucun autre et initialement au repos dans un certain référentiel peut très bien ultérieurement, selon sa position initiale, rester au repos ou commencer à se déplacer dans une certaine direction ce qui signifie que dans un tel référentiel les différentes positions, les différentes directions et les différents instants ne sont pas mécaniquement équivalents.

Dans un cadre newtonien de pensée :

On postule l'existence d'une classe de référentiels dits galiléens où l'espace est homogène et isotrope et le temps uniforme [1]. Ces référentiels sont en mouvement rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

On peut démontrer [1] qu'une conséquence de ces propriétés de l'espace et du temps d'un référentiel galiléen est que tout point matériel libre y est au repos ou animé d'un mouvement rectiligne uniforme (loi de l'inertie).

Dans le cas de particules matérielles interagissantes, leur mouvement dans un référentiel galiléen est déterminé par la loi newtonienne de la dynamique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ où $\vec{p} = m\vec{v}$ et \vec{F} est la résultante des forces extérieures exercées sur le point matériel considéré par l'ensemble des particules avec lesquelles il interagit (cf. lois d'interaction).

Dans un référentiel non galiléen, il apparaît des forces supplémentaires dites d'inertie ou "pseudo-forces" en ce sens qu'elles ne résultent pas d'une loi d'interaction mais dépendent du mouvement du référentiel considéré relativement à un référentiel galiléen.

Remarque 1 Si on se contentait de définir une force en l'identifiant simplement au taux de variation de la quantité de mouvement, cela reviendrait à donner deux noms différents à la même chose ! Giordano Bruno (1548-1600) avait d'ailleurs été amené avant Newton à postuler l'existence de causes au mouvement, en particulier à celui des planètes ; ces causes, il les appela "âmes motrices" . pourquoi pas ? mais on n'est guère plus avancé car on ne sait toujours pas prévoir de mouvement d'une masselotte accrochée à un ressort !

Pour rendre opératoire le concept de force, il faut préciser la loi de force d'interaction ; c'est par exemple ce que fit Newton (1687) dans le cas de l'interaction gravitationnelle lorsqu'il écrivit (avec des notations évidentes) : $\vec{F} = \frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}$. Ce n'est que lorsque l'on égale les deux expressions $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{Gmm'}{r^2} \vec{u}$ que l'on peut faire des calculs et prédire le mouvement des objets ; on quitte alors le monde de la métaphysique pour entrer dans celui de la physique.

Il est clair que "tout" n'est pas résolu pour autant ! Dans ce cadre newtonien de pensée, des faits troublants apparaissent et des questions ne manquent pas de se poser :

- étonnante cette coïncidence (accidentelle ?) entre la masse inertielle (celle de $m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2}$ caractérisant la "résistance" des corps à modifier leur état de mouvement) et la masse gravitationnelle (celle de $\frac{GmM}{r^2}$, source d'une mystérieuse force). Une conséquence est que tous les corps "tombent" de la même façon sous l'influence de la gravité : la Lune tombe sur la Terre exactement comme une pomme trop mûre¹ ou encore une boule de pétanque comme une balle de tennis² si on veut bien ignorer le freinage occasionné par le frottement de l'air ! Une autre conséquence est qu'à l'intérieur d'une cabine d'ascenseur sans repère extérieur, il est impossible de savoir si le poids d'un objet est dû à la force gravitationnelle, à l'accélération de la cabine (via la force d'inertie) ou à une combinaison des deux
- L'idée d'action à distance est troublante ; la loi de gravitation de Newton signifie-t-elle qu'une "planète regarde le soleil, voit à quelle distance il est, calcule l'inverse du carré de cette distance et décide de se déplacer en conséquence ?" [2]

D'où vient la loi de la gravitation universelle ? qu'exprime-t-elle ? A ces dernières questions, Newton a eu le courage de répondre : "je ne forge pas d'hypothèse". Avant Newton, la formulation mathématique des lois étaient censées représenter "l'essence" des phénomènes. Newton, lui, a utilisé les mathématiques pour construire un modèle. Cette conception "moderne" du rôle des mathématiques laisse bien sûr des zones d'ombre, n'en déplaie aux métaphysiciens, et du travail pour les générations futures ! en contrepartie, elle présente l'avantage d'une indéniable efficacité puisque l'on sait prévoir le mouvement d'une masselotte accrochée à un ressort.

En explorant les zones d'ombre de la théorie newtonienne, Einstein a développé un autre modèle, en adéquation avec l'expérience dans un plus grand nombre de situations. La théorie de la relativité générale est basée sur le principe d'équivalence, posé en principe, entre masse inerte et masse gravitationnelle et donc entre gravitation et accélération. Einstein postule que les lois physiques (pas seulement celles de la gravitation) sont localement identiques dans tous les référentiels quels que soient leurs mouvements relatifs ou leurs accélérations ; la notion de référentiel galiléen n'a donc plus d'intérêt. La notion même de force gravitationnelle n'est plus vraiment nécessaire puisque Einstein postule que les objets en chute libre se déplacent librement dans l'espace-temps sans ressentir la moindre force ; en revanche, cet espace-temps voit sa géométrie déformée, courbée par la présence de matière, et ne suit plus les règles d'Euclide ; on comprend qu'un mouvement libre puisse apparaître comme contraint (déterminé par une force) si on essaie de le décrire dans notre espace "plat" de simple mortel !

Le modèle d'Einstein est "meilleur" que celui de Newton en ce sens que son champ d'application est plus vaste ; de nombreux tests expérimentaux (le plus connu est sûrement l'avance du périhélie de Mercure de 43,03 seconde d'arc par siècle) ont tranché en faveur de la théorie de la relativité générale décrivant une distorsion de l'espace-temps où des objets se meuvent librement plutôt qu'en faveur de la théorie de Newton décrivant une force mettant en mouvement des objets dans un espace-temps euclidien. Cependant, la théorie de Newton a encore de beaux jours devant elle ! Des calculs simplement basés sur les lois de Newton, un mélange habile de rigueur mathématique, de simulations numériques et de savoir-faire intuitif permettent toujours de faire des miracles ! Citons l'un des grands projets européens des prochaines années : la sonde Rosetta devrait être lancée en janvier 2003, fera d'abord un détour par Mars, puis deux fois par la Terre pour gagner une vitesse lui permettant de rattraper en mai 2012 la comète Wirtanen, un point minuscule filant dans l'espace à 30000 km/h sur une trajectoire constamment perturbée. La sonde accompagnera la comète sur son orbite vers le soleil et il est prévu en octobre 2012 d'arrimer deux modules ("Champollion" et "Roland") sur le noyau de Wirtanen, un bloc de 3 kilomètres de diamètre où la gravité est 20 fois plus faible que sur la Terre ! Pour réaliser cette prouesse, il serait inutile de prendre en compte les subtiles corrections de la théorie de la relativité car le frottement de l'atmosphère, la pression du rayonnement solaire, les attractions parasites d'innombrables petits corps ruinent de façon permanente la précision des équations [3].

Etant donné un objet de masse m , on peut estimer par simple analyse dimensionnelle la taille critique de l'objet à partir de laquelle la théorie de Newton est mise en défaut au sens que cet objet produit des effets gravitationnels relativistes significatifs. Pour cela, fabriquons une longueur pertinente développée sous la forme d'un monôme sur la "base" constituée par m et les constantes

¹ D'après la légende, c'est en regardant tomber une pomme que Newton aurait eu l'intuition d'une Lune en chute libre sur la Terre ; de là serait germée toute sa théorie.

² D'après une "célèbre" expérience par la pensée de Claude Allègre !

fondamentales "naturelles" des théories de la gravitation (G) et de la relativité (c), soit $l_C = m^{\alpha} G^{\beta} c^{\gamma}$. Au plan dimensionnel, $F = \frac{GmM}{r^2}$ donne $MLT^{-2} = [G] \frac{M^2}{L^2}$ soit $[G] = M^{-1} L^3 T^{-2}$, donc $[l_C] = L = M^{\alpha} (M^{-1} L^3 T^{-2})^{\beta} (LT^{-1})^{\gamma}$; on en déduit $\alpha - \beta = 0, 3\beta + \gamma = 1$ et $-2\beta - \gamma = 0$ d'où $\alpha = \beta = 1$ et $\gamma = -2$; finalement $l_C = \frac{mG}{c^2}$. Les effets relativistes de la gravitation sont prépondérants si la taille de l'objet est comparable ou inférieure à l_C tandis qu'ils sont insignifiants pour une taille nettement plus grande que l_C . En particulier, si la taille de l'objet est inférieure au rayon de Schwarzschild égal à $2l_C$, la lumière est capturée par l'objet et ne peut s'échapper du "trou noir" ainsi constitué³. Le rayon de Schwarzschild de la Terre, de l'ordre du cm est très petit par rapport à son rayon, celui du Soleil, de l'ordre du km, est également nettement inférieur à son rayon ; on comprend donc pourquoi les effets relativistes de la gravitation sont très faibles dans le système solaire.

Le modèle d'Einstein sera-t-il un jour "dépassé" ? c'est fort probable puisque la relativité générale est apparemment inconciliable avec la physique quantique. La théorie des "supercordes" ouvre peut-être une piste... à suivre...

Mais n'écrasons pas une mouche avec un pavé ! Il convient bien entendu de choisir le modèle le plus approprié au problème que l'on souhaite résoudre. Dans toute la suite, nous adopterons le modèle de Newton.

- (b) Le référentiel de Copernic d'origine le centre d'inertie du système solaire et d'axes dirigés vers des étoiles "fixes" (très lointaines dans la galaxie) est le "meilleur" référentiel galiléen identifiable expérimentalement à l'échelle du système solaire et à une échelle de temps nettement inférieure à la période de révolution du soleil dans la galaxie (≈ 200 millions d'années).

Remarque 2 Un référentiel présente un caractère "d'autant plus galiléen" que sont moins importantes les forces d'inertie qu'il faut ajouter aux forces résultant d'interactions pour pouvoir rendre compte des mouvements réellement observés. On peut dire aussi qu'un référentiel présente un caractère galiléen d'autant plus marqué qu'est plus étendu le domaine spatio-temporel dans lequel les forces d'inertie sont négligeables ; c'est ainsi qu'au voisinage immédiat de la Terre et à une échelle de temps nettement inférieure au jour, le référentiel terrestre constitue un référentiel galiléen tout à fait honorable.

- (c) La recherche expérimentale des référentiels galiléens s'est faite par approximations successives en comparant les résultats des tests aux prédictions fondées sur la loi newtonienne de la dynamique. L'observation très précise des mouvements des planètes dans le référentiel de Copernic permet de vérifier avec une excellente précision son caractère galiléen (à l'échelle spatiale du système solaire et à une échelle de temps "humaine") et révèle d'ailleurs aussi la nécessité de corrections relativistes. L'expérience du pendule de Foucault montre les limites du référentiel terrestre en tant que galiléen à une échelle de temps non négligeable devant le jour.

2. Référentiel barycentrique

- (a) On appelle référentiel barycentrique d'un système matériel (relativement à un référentiel galiléen) un référentiel animé d'un mouvement de translation par rapport au référentiel galiléen et dans lequel le centre d'inertie du système est fixe.
- (b) Un tel référentiel est galiléen si et seulement si le centre d'inertie du système considéré a un mouvement rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen, ce qui bien sûr n'est en général pas le cas.

1.2 Dynamique newtonienne du point matériel en référentiel géocentrique

1. On considère un référentiel galiléen (le référentiel de Copernic compte tenu des échelles considérées dans cette partie) ; le référentiel géocentrique R_T^* est a priori non galiléen. On a, en faisant apparaître les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}(P) - m\vec{a}_e(P) - m\vec{c}_c(P)$$

³ Le rayon de Schwarzschild R_S d'un objet de masse m est le rayon pour lequel la vitesse de libération $\sqrt{\frac{2mG}{R_S}}$ de cet objet est égal à la célérité de la lumière ; on a donc $R_S = \frac{2mG}{c^2} = 2l_C$. Ni la matière ni la lumière ne peuvent s'échapper d'un objet de rayon inférieur à R_S .

Le mouvement d'entraînement de R_T^* par rapport à R_g est une translation pure; le champ d'accélération d'entraînement est donc uniforme et le champ d'accélération de Coriolis est nul :

$$\vec{a}_c(P) = \vec{a}(P \in R_T^*/R_g) = \vec{a}(T/R_g) \text{ et } \vec{a}_c(P) = \vec{0}$$

On a donc :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}(P) - m\vec{a}(T/R_g)$$

2. D'après la relation précédente et les hypothèses de l'énoncé :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_S(P) + m\vec{h}_L(P) - m\vec{a}(T/R_g)$$

En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à la Terre dans R_g (galiléen) :

$$m\vec{a}(T/R_g) = \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}(M) dm(M) \text{ où } \vec{h}(M) = \vec{h}_T(M) + \vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)$$

mais $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_T(M) dm(M) = \vec{0}$ car résultante des forces gravitationnelles intérieures (exercées par la Terre sur elle-même)

On obtient finalement :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_S(P) + m\vec{h}_L(P) - \frac{m}{m_T} \iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M) \quad (1)$$

3. Le soleil est supposé posséder la symétrie matérielle sphérique; on a donc (théorème de Gauss) :

$$\vec{h}_S(M) = Gm_S \frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} \Rightarrow \vec{h}_S(M) - \vec{h}_S(T) = Gm_S \left(\frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} - \frac{\vec{T}\vec{S}}{T^3} \right)$$

$$\vec{M}\vec{S} = \vec{M}\vec{T} + \vec{T}\vec{S} \Rightarrow \frac{1}{M^3} = \frac{1}{T^3} \left(1 + 2\frac{\vec{M}\vec{T} \cdot \vec{T}\vec{S}}{T^2 S^2} + \frac{M^2 T^2}{T^2 S^2} \right)^{-3/2}$$

$\forall M \in \text{Terre}, MT \leq r_T \ll d_S$

on a $\frac{1}{M^3} = \frac{1}{T^3} \left(1 - 3\frac{\vec{M}\vec{T} \cdot \vec{T}\vec{S}}{T^2 S^2} \right)$ à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$

et $\frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} = \frac{\vec{M}\vec{T} + \vec{T}\vec{S}}{M^3} = \frac{1}{T^3} (\vec{M}\vec{T} + \vec{T}\vec{S}) - 3 \left(\frac{\vec{M}\vec{T} \cdot \vec{T}\vec{S}}{T^2 S^2} \right) \vec{T}\vec{S}$ à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$

en effet $\left\| 3 \left(\frac{\vec{M}\vec{T} \cdot \vec{T}\vec{S}}{T^2 S^2} \right) \vec{T}\vec{S} \right\| \sim r_T \cdot \frac{r_T}{d_S} \ll \left\| 3 \left(\frac{\vec{M}\vec{T} \cdot \vec{T}\vec{S}}{T^2 S^2} \right) \vec{T}\vec{S} \right\| \sim r_T$ (~ signifie : égalité en ordre de grandeur)

donc, à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$:

$$\vec{h}_S(M) - \vec{h}_S(T) = Gm_S \left(\frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} - \frac{\vec{T}\vec{S}}{T^3} \right) = \frac{Gm_S}{(TS)^3} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{M} \cdot \vec{T}\vec{S}) \vec{T}\vec{S}}{(TS)^2} - \vec{T}\vec{M} \right] \quad (1 \text{ bis})$$

donc, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$:

$$\vec{F}_{\text{Soleil} \rightarrow \text{Terre}} = \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = m_T \vec{h}_S(T) + \frac{Gm_S}{(TS)^3} \iiint_{M \in \text{Terre}} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{M} \cdot \vec{T}\vec{S}) \vec{T}\vec{S}}{(TS)^2} - \vec{T}\vec{M} \right] dm(M)$$

or, puisque T est centre d'inertie de la Terre :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{T}\vec{M} dm(M) = \vec{0} \text{ et } \iiint_{M \in \text{Terre}} (\vec{T}\vec{M} \cdot \vec{T}\vec{S}) dm(M) = \left[\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{T}\vec{M} \cdot dm(M) \right] \cdot \vec{T}\vec{S} = 0$$

donc, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$, $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = m_T \vec{h}_S(T)$

de même, au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$, $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = m_T \vec{h}_L(T)$

Finalement :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} [\vec{h}_S(M) + \vec{h}_L(M)] dm(M) = m_T [\vec{h}_S(T) + \vec{h}_L(T)] \text{ au second ordre près en } \frac{r_T}{d_S} \text{ et } \frac{r_T}{d_L} \quad (2)$$

Considérons l'interaction entre la Terre et une particule ponctuelle de masse m_S placée en S :

$\vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = \iiint_{M \in \text{Terre}} Gm_S \frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} dm(M)$ identique à la force exercée par le soleil supposé sphérique homogène sur la Terre

mais $\vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = -\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow S}$ d'après le principe des actions réciproques

or $\vec{F}_{\text{Terre} \rightarrow S} = m_S \vec{h}_T(S)$ (la particule S est ponctuelle)

Si on suppose la Terre sphérique homogène, $\vec{h}_T(S) = Gm_T \frac{\vec{T}\vec{S}}{S^3}$ (par le théorème de Gauss)

$$\text{donc } \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} Gm_S \frac{\vec{M}\vec{S}}{M^3} dm(M) = \vec{F}_{S \rightarrow \text{Terre}} = Gm_T m_S \frac{\vec{T}\vec{S}}{S^3} = m_T \vec{h}_S(T)$$

$$\text{de même } \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = m_T \vec{h}_L(T)$$

Par conséquent, si la Terre est sphérique, la relation (2) est vérifiée à tout ordre

Remarque 3 Il est également possible de démontrer la relation (2) de manière non intrinsèque en considérant les coordonnées; en utilisant les notations de l'énoncé :

$$\vec{x} \cdot \vec{h}_S(M) = Gm_S \frac{x_S - z}{[(x_S - z)^2 + (y_S - v)^2 + (z_S - z)^2]^{3/2}}$$

un D.L à l'ordre 2 en $\frac{r_S}{d_S} \ll 1$, $\frac{d_S}{d_S} \ll 1$, et $\frac{r_S}{d_S} \ll 1$ donne :

$$\vec{x} \cdot \vec{h}_S(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} (x_S - z) \left[1 + 3 \left(\frac{zx_S + yv_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{z^2 + v^2 + z^2}{d_S^2} \right) + \frac{15}{2} \frac{(zx_S + yv_S + zz_S)^2}{d_S^4} + o \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^2 \right]$$

avec $dm(M) = \mu d\tau(M)$ (μ est la masse volumique supposée uniforme de la Terre) et compte tenu des symétries matérielles :

$$\iiint_{M \in \text{Terre}} x d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} y d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} z d\tau(M) = 0$$

$$\text{et } \iiint_{M \in \text{Terre}} xy d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} xz d\tau(M) = \iiint_{M \in \text{Terre}} yz d\tau(M) = 0$$

$$\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} \left[x_S \mu \iiint d\tau - 3 \frac{zx_S}{d_S^2} \iiint x^2 d\tau - \frac{3}{2} \frac{zx_S}{d_S^2} (\iiint x^2 d\tau + \dots) \dots \right]$$

Soit :

$$\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S}{d_S^3} [m_T x_S + o \left(\frac{r_T}{d_S} \right)]$$

On obtient les deux autres composantes en effectuant les permutations circulaires ($x \rightarrow y \rightarrow z$) et ($x_S \rightarrow y_S \rightarrow z_S$); par conséquent, il vient : $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M) = \frac{Gm_S m_T}{(TS)^3} \vec{T}\vec{S} = m_T \vec{h}_S(T)$ au second ordre près en $\frac{r_T}{d_S}$

De même : $\iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_L(M) dm(M) = \frac{Gm_L m_T}{(TL)^3} \vec{T}\vec{L} = m_T \vec{h}_L(T)$ au second ordre près en $\frac{r_T}{d_L}$ (CQFV)

Dans l'hypothèse d'une Terre à symétrie sphérique : $\iiint x^2 d\tau(M) = \iiint y^2 d\tau(M) = \iiint z^2 d\tau(M)$

Le terme d'ordre 2 de $\vec{x} \cdot \iiint_{M \in \text{Terre}} \vec{h}_S(M) dm(M)$ est nul auquel cas le résultat précédent est acquis au troisième ordre près.

4. Les relations (1) et (2) donnent :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m \underbrace{[\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)]}_{\vec{C}_S^*(P)} + m \underbrace{[\vec{h}_L(P) - \vec{h}_L(T)]}_{\vec{C}_L^*(P)} \quad (3)$$

5. D'après la relation (1 bis), on obtient sans calcul supplémentaire l'expression intrinsèque de $\vec{C}_S^*(P)$ à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_S}$:

$$\vec{C}_S^*(P) = \frac{Gm_S}{(TS)^3} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{P} \cdot \vec{T}\vec{S}) \vec{T}\vec{S}}{(TS)^2} - \vec{T}\vec{P} \right] \quad (4)$$

$\vec{C}_L^*(P)$ s'obtenant par une expression analogue à l'ordre 1 en $\frac{r_T}{d_L}$:

$$\vec{C}_L^*(P) = \frac{Gm_L}{(TL)^3} \left[3 \frac{(\vec{T}\vec{P} \cdot \vec{T}\vec{L}) \vec{T}\vec{L}}{(TL)^2} - \vec{T}\vec{P} \right] \quad (4 \text{ bis})$$

Remarque 4 En considérant les composantes (on reprend le DL effectué remarque 3) :

$$\vec{x} \cdot [\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)] = \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S \left[1 + 3 \left(\frac{xx_S + yy_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{x}{x_S} + o\left(\frac{r}{d_S}\right) \right] - \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S$$

$$\text{soit } \vec{x} \cdot [\vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(T)] = \frac{Gm_S}{d_S^3} x_S \left[3 \left(\frac{xx_S + yy_S + zz_S}{d_S^2} \right) - \frac{x}{x_S} + o\left(\frac{r}{d_S}\right) \right]$$

On obtient les deux autres composantes en effectuant les permutations circulaires ($x \rightarrow y \rightarrow z$) et ($x_S \rightarrow y_S \rightarrow z_S$)

On en déduit l'expression intrinsèque (4) de $\vec{C}_S^*(P)$ à l'ordre 1 en $\frac{r}{d_S}$ (CQFV)

6. Expression des énergies potentielles massiques de marée :

(a) La relation (4) donne :

$$\vec{C}_S^*(P) = \frac{Gm_S r}{d_S^3} [(3 \cos^2 \theta_S - 1) \vec{u}_r - 3 \cos \theta_S \sin \theta_S \vec{u}_{\theta_S}]$$

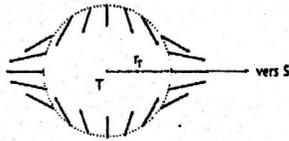
de manière analogue :

$$\vec{C}_L^*(P) = \frac{Gm_L r}{d_L^3} [(3 \cos^2 \theta_L - 1) \vec{u}_r - 3 \cos \theta_L \sin \theta_L \vec{u}_{\theta_L}]$$

(b) Il est facile de vérifier que l'on a bien $\vec{C}_S^*(P) = -\vec{\nabla}_P(V_S(P)) = -\frac{\partial V_S}{\partial r} \vec{u}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V_S}{\partial \theta_S} \vec{u}_{\theta_S}$ (resp. $\vec{C}_L^*(P) = -\vec{\nabla}_P(V_L(P))$); en intégrant les composantes des champs de marée, on trouve les expressions des énergies potentielles massiques de marées (à une constante près) :

$$V_S(P) = -\frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) \text{ et } V_L(P) = -\frac{3Gm_L r^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3})$$

7. Le champ de marée exercé par le Soleil (resp. la Lune) tend à déformer la matière en la "disloquant", plus précisément en l'étirant de part et d'autre du plan orthogonal en T à la direction TS (resp. TL). La représentation de ce champ à la surface de la Terre dans un plan méridien d'axe TS est représentée sur la figure ci-dessous.



Remarque 5 En coordonnées cartésiennes, le champ de marée s'exprime simplement : avec $\vec{u}_r = \vec{x} \cos \theta + \vec{y} \sin \theta$, $\vec{u}_\theta = -\vec{x} \sin \theta + \vec{y} \cos \theta$, $x = r \cos \theta$ et $y = r \sin \theta$, on obtient :

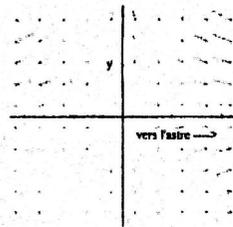
$$\vec{C} = \frac{Gm}{d^3} (2x\vec{x} - y\vec{y})$$

L'équation différentielle des lignes de champ s'écrit : $\frac{dx}{2x} = \frac{dy}{-y}$

Par intégration, on obtient l'équation des lignes de champ de marée : $xy^2 = \text{constante}$

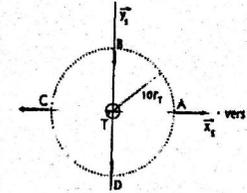
Les lignes de champ de marée sont représentées ci-dessous ; l'axe des x est dirigé vers l'astre attracteur et les axes x et y se coupent au point T (centre de la Terre)

Plot 2D + Vector Field : $[2x, -y]$



Carte du champ de marée

8. Dans le voisinage de la Terre, i.e dans la région où les termes en $(\frac{r}{d_L})^2$ et $(\frac{r}{d_S})^2$ sont négligeables, h_T varie comme $\frac{1}{r}$ tandis que C_L et C_S varient comme r ; les effets gravitationnels différentiels de la Lune et du Soleil y sont donc d'autant plus marqués que l'on se trouve loin de T. Aux limites du "voisinage" de la Terre (sphère de centre T et de rayon $10r_T$), on calcule les champs de marée aux points A, B, C, D (cf. figure ci-dessous) :



$$\vec{C}_S^*(A) = \frac{20Gm_S r_T}{d_S^3} \vec{x}_S = -\vec{C}_S^*(C) \text{ et } \vec{C}_S^*(D) = \frac{10Gm_S r_T}{d_S^3} \vec{y}_S = -\vec{C}_S^*(B)$$

Aux limites du voisinage de la Terre considéré, l'intensité maximale du champ de marée du soleil est $\frac{20Gm_S r_T}{d_S^3}$ de l'ordre de $5.10^{-6} m.s^{-2}$, tandis que l'intensité maximale du champ de marée de la Lune est $\frac{20Gm_L r_T}{d_L^3}$ de l'ordre de $10^{-5} m.s^{-2}$, à comparer dans l'équation (3) à l'intensité du champ gravitationnel terrestre $h_T = \frac{Gm_T}{100r_T^2}$ de l'ordre de $10^{-1} m.s^{-2}$.

Les champs de marée du Soleil et de la lune sont donc d'intensités comparables (l'action du Soleil est environ deux fois plus faible que celle de la Lune) mais ils sont négligeables devant le champ gravitationnel terrestre (rapports inférieurs à 10^{-4}).

Dans le voisinage de la Terre, on peut donc, avec une "excellente approximation", écrire la relation fondamentale de la dynamique dans R_T^* sous la forme :

$$m\vec{a}(P/R_T^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P)$$

En raison de l'égalité entre la masse inerte et la masse gravitationnelle, il y a exacte compensation au point T (et quasi-compensation dans le voisinage de ce point) entre la force d'inertie d'entraînement liée au caractère non galiléen de R_T^* et la résultante des forces gravitationnelles exercées par les astres autres que la Terre.

Puisque la force d'inertie disparaît de l'équation du mouvement, le référentiel géocentrique R_T^* apparaît donc comme un "excellent" référentiel galiléen (au sens qu'il n'y a pas lieu de prendre en compte la force d'inertie d'entraînement par rapport au référentiel galiléen de Copernic) à condition de ne considérer que la seule action de la Terre comme force d'origine gravitationnelle. On parlera de référentiel "pseudo-galiléen".

Remarque 6 Dans le voisinage de la Terre, la formulation de la relation fondamentale de la dynamique prend donc une forme plus "simple" dans le référentiel géocentrique R_T^* que dans le référentiel de Copernic puisque la force gravitationnelle extra-terrestre "disparaît". On pourrait dire que R_T^* est le "meilleur" référentiel au voisinage de T au sens que la RFD s'y exprime le plus simplement, et de manière plus générale que les référentiels "localement" en chute libre sont "meilleurs".

Insistons sur le caractère local de cette propriété :

- au plan spatial d'abord : le domaine envisagé ne doit pas être trop étendu car nous avons vu que le champ de marée créé par un astre A au voisinage d'un point très éloigné ($r \ll d_A$) en chute libre croît avec la distance à ce point comme $\frac{r}{d_A}$; de plus, il faut limiter l'étude à des objets de "petite" taille car de faibles forces de marées peuvent tout de même produire des déformations significatives sur des objets étendus (cf. section 2)
- au plan temporel ensuite : la durée de l'expérience ne doit pas être trop longue car même dans la région où le champ de marée est négligeable, ses effets séculaires i.e à long terme peuvent être importants ; par exemple, les trajectoires de satellites doivent être régulièrement corrigées des phénomènes de dérives occasionnés par les champs de marée des astres extra-terrestres. En ordre de grandeur, $C_A \sim \frac{Gm_A r}{d_A^3}$ que l'on peut mettre sous la forme $C_A \sim \omega_A^2 r$, ce qui permet de définir un

temps caractéristique $T_A \sim \frac{1}{\omega_A} \sim \sqrt{\frac{d_A^3}{Gm_A}}$. Ce temps vaut 39 jours pour la Lune et 58 jours pour le Soleil

Bref, à condition de ne pas prendre en compte les forces gravitationnelles extra-terrestres, le référentiel géocentrique se comporte comme un "excellent" référentiel galiléen dans le voisinage de la Terre (par exemple dans une sphère de rayon $10r_T$ centrée sur T) et à une échelle de temps nettement inférieure au mois.

2 Quelques effets gravitationnels différentiels :

2.1 Pourquoi la Lune n'est-elle pas capturée par le Soleil ?

$$1. \frac{F_{SL}}{F_{TL}} \simeq \frac{m_S}{m_T} \left(\frac{d_L}{d_S} \right)^2 \simeq 2$$

Le Soleil exerce sur la Lune une force deux fois plus intense que celle exercée par la Terre; dans le référentiel galiléen de Copernic, la Lune est bien capturée par le Soleil puisqu'elle effectue un petit mouvement d'oscillation autour d'une trajectoire moyenne centrée sur le soleil. Pour étudier le mouvement relatif de la Terre et de la Lune, il est préférable de prendre le point de vue d'un observateur lié au référentiel pseudo-galiléen géocentrique; en raison du mouvement de la Terre par rapport au Soleil, le soleil "n'agit" sur le mouvement relatif de la Lune et de la Terre que par l'intermédiaire d'un terme différentiel de marée.

2. En appliquant le théorème du centre d'inertie à la Lune dans le référentiel géocentrique, on obtient, d'après la relation (3) :

$$m_L \bar{a}(L/R_T^*) = m_L \bar{h}_T(L) + m_L [\bar{h}_S(L) - \bar{h}_S(T)] + m_L \left[\frac{\bar{h}_L(L) - \bar{h}_L(T)}{\delta} \right]$$

soit :

$$\bar{a}(L/R_T^*) = [\bar{h}_T(L) - \bar{h}_L(T)] + [\bar{h}_S(L) - \bar{h}_S(T)]$$

L'accélération $\bar{a}(L/R_T^*)$ de la Lune par rapport à la Terre est composée de deux termes :

* $[\bar{h}_T(L) - \bar{h}_L(T)] = \frac{G(m_T + m_L)}{d_L^2} \vec{L}\vec{T} \simeq \frac{Gm_T}{d_L^2} \vec{L}\vec{T}$, terme attractif mesurant la capacité de la Lune à rester dans le voisinage de la Terre

* $[\bar{h}_S(L) - \bar{h}_S(T)]$ est le champ de marée créé par le soleil au point L tendant comme on l'a vu plus haut à "disloquer" le système Terre-Lune; en effet, comme $TL = d_L \ll TS = d_S$, on peut calculer ce champ par la relation (4); lorsque S, T, L sont alignés, il est maximal et la relation (4) donne son expression $\frac{Gm_S}{d_S^3} 2\vec{T}\vec{L}$.

La condition de satellisation de la Lune par la Terre est donc : $\frac{Gm_T}{d_L^2} > 2\frac{Gm_S}{d_S^3}$, soit :

$$d_L < d_S \left(\frac{m_T}{2m_S} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Cette distance critique vaut sensiblement $1,7 \cdot 10^6$ km; elle est bien supérieure à la distance d_L actuelle ($3,8 \cdot 10^5$ km).

2.2 Fragmentation de la comète Shoemaker-Levy 9

Jupiter est une planète de masse particulièrement grande; on peut concevoir que la comète Shoemaker-Levy a "frôlé" Jupiter d'un peu trop près! En passant en deçà de la limite de Roche, elle a pu se disloquer par effet de marée.

1. Il suffit d'adapter les résultats de la question 8 de la sous-section 1.2 au cas du référentiel jupiterocentrique; ce dernier est pseudo-galiléen lorsque l'on néglige les champs de marée produits par le Soleil et les autres planètes devant le champ gravitationnel créé par Jupiter. Ici, l'approximation est encore meilleure pour deux raisons :

- Jupiter est plus éloigné du Soleil que la Terre (le champ de marée décroît comme $\frac{1}{d_A^3}$)
- le champ de gravitation de Jupiter est plus intense que celui de la Terre (planète plus massive).

2. Limite de Roche

- (a) Appliquons le théorème du centre d'inertie à la sphère de centre C_1 dans le référentiel cométocentrique R_C^* sous la forme de la relation (3) adaptée au cas considéré. D'après la question précédente, Jupiter constitue la seule source gravitationnelle "active" extra-comète; dans R_C^* , Jupiter "agit" sur la sphère de centre C_1 par le terme de marée $m(\bar{h}_J(C_1) - \bar{h}_J(C))$ tandis que la sphère de centre C_2 agit par la force gravitationnelle $m\bar{h}_{C_2}(C_1)$ ainsi que par la force de contact $\vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1}$, empêchant, tant que le contact est établi, l'interpénétration des deux sphères; on a donc :

$$m\bar{a}(C_1/R_C^*) = m\bar{h}_{C_2}(C_1) + \vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1} + m(\bar{h}_J(C_1) - \bar{h}_J(C))$$

Tant que les deux sphères sont en contact, la comète a un mouvement de rotation propre synchronisé sur son mouvement orbital puisque les points C_1 et C_2 restent constamment alignés avec J^4 . Le mouvement de C_1 dans R_C^* est donc circulaire uniforme de vitesse angulaire ω donnée par $\frac{Gm_J(2m)}{d^3} = 2m\omega^2 d$ (Théorème du centre d'inertie appliqué à la comète dans le référentiel pseudo-galiléen jupiterocentrique)

donc $m\bar{a}(C_1/R_C^*) = -m\omega^2 r \vec{u}$ (\vec{u} étant le vecteur unitaire de la direction $J \rightarrow C_1$)

soit $m\bar{a}(C_1/R_C^*) = -\frac{Gm_J m}{d^3} r \vec{u}$

d'autre part, $m\bar{h}_{C_2}(C_1) = -\frac{Gm^2}{(2r)^2} \vec{u}$

et $m(\bar{h}_J(C_1) - \bar{h}_J(C)) = \frac{2Gm_J m}{d^3} r \vec{u}$ (cf relation (4) légitimée par $d \gg r$)

donc $\vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1} \cdot \vec{u} = -\frac{Gm m}{d^3} r + \frac{Gm^2}{(2r)^2} - \frac{2Gm_J m}{d^3} r = \frac{Gm^2}{(2r)^2} - \frac{3Gm_J m}{d^3} r$

On traduit la condition de non fragmentation par $\vec{F}_{C_2 \rightarrow C_1} \cdot \vec{u} > 0$ (condition de contact), soit $d > r \left(12 \frac{m_J}{m} \right)^{\frac{1}{3}}$ soit encore $d > d_{\min}$ avec

$$d_{\min} = r_J \left(12 \frac{\mu_J}{\mu_C} \right)^{\frac{1}{3}}$$

- (b) On calcule $\mu_J \simeq 1,25 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$ et $d_{\min} \simeq 2,55r_J$

3. La stalactite cylindrique de longueur l et de section S s'effondre sous l'effet de son poids lorsque $P_{coh} S = \mu_C g l S$; avec $l = 3 \text{ m}$, on a :

$$P_{coh} = \mu_C g l \simeq 2,68 \cdot 10^4 \text{ N m}^{-2}$$

4. Taille des morceaux

- (a) Lien entre les deux modèles : $m = \mu_C \frac{4}{3} \pi r^3 = \mu_C \frac{2}{3} \pi r^3$ donc

$$r' = 2^{\frac{1}{3}} r \simeq 1,26r$$

- (b) A la limite de la fragmentation, on a : $P_{coh} \pi r'^2 + \frac{Gm^2}{(2r')^2} = \frac{3Gm m_J r}{d_0^3}$, avec $\frac{Gm^2}{(2r')^2} = \frac{3Gm m_J r}{d_{\min}^3}$, on obtient : $P_{coh} \pi r'^2 = \frac{3Gm m_J r}{d_{\min}^3}$

Finalement :

$$r = \frac{3}{2^{\frac{1}{3}}} \sqrt{\frac{P_{coh}}{\pi G \mu_C^2 \alpha}}$$

⁴ Le phénomène de synchronisation du mouvement de rotation propre sur le mouvement orbital est réalisé pour bon nombre de satellites des planètes du système solaire; c'est également un effet de marée (cf. section 5)

(c) On trouve $r \simeq 13,1$ km (dans le cas de la glace I); ce modèle surestime la taille des fragments puisque ceux-ci avaient un diamètre variant entre 1 et 3 km.

5. Dans le modèle de la boule de neige peu compacte, avec $P_{coh} = 10^2 N.m^{-2}$ et $\mu_C = 0,5.10^3 kg.m^{-3}$, on recalculé $d_{min} = 3,11r_J$ et $\alpha = 6,63$ ce qui conduit à :

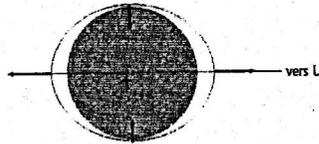
$$r \simeq 1,0 \text{ km}$$

ce qui est une bonne estimation de la taille réellement observée.

2.3 Marées océaniques

Brèves explications ...

1. Les océans se déforment sous l'effet des champs de marée de la Lune et du Soleil (cf. figure de la carte du champ de marée); on a vu (cf. question 8 de la sous-section 1.2) que le champ de marée de la Lune est deux fois plus intense que celui du soleil. En admettant que la déformation produite est proportionnelle à la contrainte appliquée (modèle statique linéaire), le champ de marée de la Lune (effet principal) crée un double "bourrelet" (cf. figure ci-dessous) de symétrie de révolution d'axe TL. La marée haute est observée lorsque la Lune passe au méridien du lieu, côté "jour lunaire" (bourrelet le plus proche de L) et côté "nuit lunaire" (bourrelet le plus éloigné de L) tandis que la marée basse est observée dans le plan orthogonal en T à l'axe TL.



2. En raison de la rotation propre de la Terre autour de l'axe des pôles (période 1 jour), chaque point de la Terre passe deux fois par jour sous un bourrelet; il existe donc deux marées hautes et deux marées basses par jour en un lieu donné.
3. La durée séparant deux marées hautes consécutives en un lieu donné est évidemment le demi-jour lunaire, le jour lunaire étant la durée séparant deux passages consécutifs de la Lune par le méridien du lieu considéré. Pendant que la Terre tourne sur elle-même, la Lune tourne dans le même sens sur son orbite autour de la Terre. A la fin de sa rotation quotidienne (jour solaire), le méridien d'un lieu donné se retrouve dans la même position par rapport au Soleil mais doit tourner d'un angle supplémentaire pour se retrouver dans la même position par rapport à la Lune.
- Il est clair qu'au cours d'une lunaison, l'angle supplémentaire vaut 2π ; autrement dit, pendant ce temps, la Lune est passée au méridien d'un lieu donné exactement une fois de moins que le soleil; on a donc :

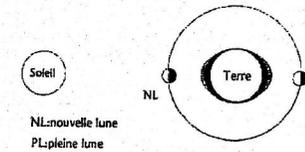
$$29,530 \text{ jours solaires} = (29,530 - 1) \text{ jours lunaires}$$

La période de la marée lunaire moyenne est donc :

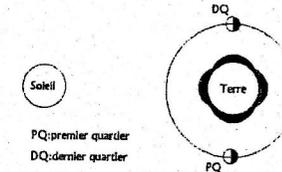
$$\frac{1}{2} \times \frac{29,530}{28,530} \times 24 \text{ heures} \simeq 12,420 \text{ heures} \simeq 12 \text{ heures } 25 \text{ minutes}$$

Le retard moyen de l'heure de marée d'un jour à l'autre est donc de 50 minutes.

4. L'effet du soleil est secondaire mais ne peut être négligé : en un mois, il y a deux vives-eaux et deux mortes-eaux. En vives-eaux, l'amplitude de marée est maximale tandis qu'en mortes-eaux, elle est minimale. Cette amplification du phénomène de marée en période de vives-eaux est due à la conjugaison des champs de marée lunaire et solaire; les vives-eaux ont lieu au moment de la pleine Lune et de la nouvelle Lune lorsque le Soleil et la Lune passent tous deux dans le plan méridien du lieu considéré; ces deux configurations sont appelées syzygies (cf. figure ci-dessous).



Les mortes-eaux ont lieu au premier et au dernier quartier lunaire. La Lune et le Soleil forment alors entre eux un angle de 90 degrés, configuration appelée quadrature; les champs de marée se "contrarient" et l'amplitude de marée est minimale (cf. figure ci-dessous).



5. Le globe terrestre n'est pas un solide totalement rigide; les champs de marée agissent dans tout le volume de la Terre, y compris le magma; ils engendrent des marées magmatiques qui provoquent des déformations de la croûte terrestre; ces déformations constituent les "marées terrestres". Des calculs ont montré que la fluctuation d'énergie du faisceau du LEP du CERN correspondait à une variation de 1mm du périmètre (26,7 km) de l'accélérateur.

3 Amplitude et périodicité de marée statique

3.1 Equation d'équilibre des océans en référentiel terrestre.

1. A cause de la révolution orbitale de la Terre autour du soleil s'effectuant dans le même sens que la rotation propre de la Terre, la Terre fait dans R_T un peu plus d'un tour entre deux passages consécutifs du Soleil au méridien d'un lieu considéré. En une année (365,25 jours solaires) la Terre fait $365,25 + 1 = 366,25$ tours autour de l'axe des pôles relativement à R_T .

La durée du jour sidéral est donc :

$$T = \text{un jour sidéral} = 86400 \times \frac{365,25}{366,25} \simeq 86164 \text{ s}$$

On a donc :

$$\Omega_T = \frac{2\pi}{T} \simeq 7,292.10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$$

2. En considérant un volume \mathcal{V} de fluide limité par la surface fermée S , la formule du gradient permet d'exprimer la résultante des forces de pression sous la forme d'une intégrale volumique étendue à \mathcal{V} :

$$\iint_S -P \vec{dS} = \iiint_{\mathcal{V}} (-\vec{\text{grad}} P) d\tau$$

tandis que la formule du rotationnel permet d'exprimer le moment résultant des forces de pression calculé en un point O quelconque sous la forme d'une intégrale volumique étendue à \mathcal{V} : $\iint_S \vec{OM} \wedge (-P \vec{dS}) = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{\text{rot}}(P \cdot \vec{OM}) d\tau$. Or $\vec{\text{rot}}(P \cdot \vec{OM}) = P \cdot \vec{\text{rot}}(\vec{OM}) + \vec{\text{grad}} P \wedge \vec{OM} = \vec{\text{grad}} P \wedge \vec{OM}$ puisque $\vec{\text{rot}}(\vec{OM}) = \vec{0}$.
Donc :

$$\iint_S \vec{OM} \wedge (-P \vec{dS}) = \iiint_{\mathcal{V}} \vec{OM} \wedge (-\vec{\text{grad}} P) d\tau$$

L'équivalence des forces de pression avec une distribution volumique de forces de densité $-\vec{\text{grad}} P$ est donc établie pour la résultante et le moment résultant.

3. En appliquant la relation (3) à une particule mésoscopique de fluide de volume $d\tau$ située au point M , on obtient :

$$\mu(d\tau) \vec{a}(M/R_T) = -(d\tau) \overrightarrow{\text{grad}}_M P(M) + \mu(d\tau) \vec{h}_T(M) + \mu(d\tau) \vec{C}_S(M) + \mu(d\tau) \vec{C}_L(M)$$

D'autre part $\vec{a}(M/R_T) = \vec{0}$ (la particule est en équilibre dans R_T). Le mouvement d'entraînement de R_T par rapport à R_T^* est un mouvement de rotation à vitesse angulaire uniforme Ω_T autour de l'axe des pôles; l'accélération d'inertie d'entraînement du point M s'écrit donc $-\vec{a}_e^+(M) = \Omega_T^2 \vec{H}\vec{M} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\Omega_T^2 H M^2}{2} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} \right)$ (H est la projection de M sur l'axe des pôles); l'accélération d'inertie de Coriolis est nulle puisque la particule est immobile dans R_T

En outre, dans le cas d'une Terre à symétrie matérielle sphérique, $\vec{h}_T(M) = -Gm_T \frac{\vec{r}_T}{r_T^3} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{Gm_T}{r_T} \right) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M \left(\frac{Gm_T}{r} \right)$

Enfin, $\vec{C}_S(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(-V_S)$ et $\vec{C}_L(M) = -\overrightarrow{\text{grad}}_M(-V_L)$ (cf. 6b) de la sous-section 1.2

En "rassemblant les petits morceaux", on obtient ($\mu = \text{constante}$) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_M \left[\frac{P}{\mu} + \underbrace{(V_T + V_L + V_S + V_I)}_V \right] = \vec{0} \text{ où } \begin{cases} V_T = -\frac{Gm_T}{r} \\ V_L = -\frac{3Gm_L r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) \\ V_S = -\frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) \\ V_I = -\frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} \end{cases} \quad (5)$$

4. Compte tenu des hypothèses, la surface libre est isobare; pour tout déplacement élémentaire $d\vec{M}$ sur la surface libre, on a :

$$dP(M) = (\overrightarrow{\text{grad}}_M P) \cdot d\vec{M} = 0 \text{ et d'après l'équation (5), } (\overrightarrow{\text{grad}}_M V) \cdot d\vec{M} = dV = 0$$

L'énergie potentielle massique V reste donc constante sur la surface libre isobare de l'océan; donc :

$$\frac{Gm_T}{r} + \frac{3Gm_S r^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) + \frac{3Gm_L r^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \frac{\Omega_T^2 r^2 \cos^2 \lambda}{2} = \text{constante}$$

Remarque 7 Attention! Il est faux d'affirmer que $\overrightarrow{\text{grad}}_M P$ est nul sur une surface isobare; $\overrightarrow{\text{grad}}_M P$ est simplement orthogonal à la surface isobare passant par le point considéré.

3.2 Amplitude à l'équateur des composantes de marée statique générées par la "Lune moyenne" et le "Soleil moyen".

1. Effets du mouvement de rotation propre de la Terre

(a) L'expression précédente donne :

$$\frac{Gm_T}{r_{\text{pôle}}} = \frac{Gm_T}{r_{\text{équateur}}} + \frac{\Omega_T^2 r_{\text{équateur}}^2}{2}$$

La profondeur des océans est en moyenne de $4 \text{ km} \ll r_T \simeq 6400 \text{ km}$; avec $r_{\text{équateur}} - r_{\text{pôle}} = \Delta h_I \ll r_T$ ($\Omega_T^2 r^2 \ll \frac{Gm_T}{r}$) et en faisant un calcul à l'ordre le plus bas non nul, on obtient :

$$\Delta h_I \simeq \frac{\Omega_T^2 r_T^4}{2Gm_T} \simeq 11 \text{ km}$$

Ce résultat est aberrant (la profondeur des plus grandes fosses marines est de 10 km !); le modèle considéré (Terre assimilée à une sphère solide recouverte entièrement d'eau) ne convient pas pour le calcul des variations de profondeur des océans dues aux seuls effets d'inertie de la rotation propre de la Terre. En particulier, la croûte terrestre présente elle-même un aplatissement.

(b) Par contre, on remarque que ce modèle très sommaire fournit tout de même le bon ordre de grandeur de l'aplatissement de la Terre dans son ensemble. En effet, avec $\Delta h_I \simeq 11 \text{ km}$, on calcule $\frac{\Delta r}{r} \simeq 0,0017$, de même ordre de grandeur que la valeur $0,0034$ constatée. La raison est qu'aux échelles de temps géologiques, la Terre dans son ensemble est liquide.

2. En notant h la variation du niveau de la mer provoquée par les seuls effets de marée statique, on a :

$$\frac{Gm_T}{(r_m+h)} + \frac{3Gm_S(r_m+h)^2}{2d_S^3} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) + \frac{3Gm_L(r_m+h)^2}{2d_L^3} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) = \text{constante} = C$$

où r_m est le rayon moyen de la surface libre

avec $h \ll r_T \simeq r_m$ ($\frac{Gm_S r^2}{d_S^3}$ et $\frac{Gm_L r^2}{d_L^3} \ll \frac{Gm_T}{r}$) et en effectuant un calcul à l'ordre le plus bas non nul, on obtient :

$$h = \frac{r_T^2}{Gm_T} \left(\frac{Gm_T}{r_T} - C \right) + \frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3 (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3 (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})$$

Les forces de marée déforment la surface libre mais il y a conservation du volume d'eau (incompressibilité) donc $\iint_{\text{sphère de centre } T} h \cdot dS = 0$

On peut vérifier que $\iint_{\text{sphère de centre } T} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) dS = \iint_{\text{sphère de centre } T} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}) dS = 0$ on en déduit que $C = \frac{Gm_T}{r_T}$, et donc que :

$$h = \underbrace{\frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3 (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3})}_{h_L} + \underbrace{\frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3 (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})}_{h_S}$$

A l'équateur, θ_L et θ_S varient entre 0 et 2π lorsque la Lune moyenne et le Soleil moyen décrivent leur trajectoire apparente autour de la Terre et $\cos^2 \theta_L$ et $\cos^2 \theta_S$ varient entre 0 et 1; on en déduit :

$$\Delta h_{\text{max}} = \underbrace{\frac{3r_T m_L}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_L} \right)^3}_{\Delta h_{L \text{ max}} \simeq 54 \text{ cm}} + \underbrace{\frac{3r_T m_S}{2 m_T} \left(\frac{r_T}{d_S} \right)^3}_{\Delta h_{S \text{ max}} \simeq 24 \text{ cm}}$$

3.3 La marée statique en fonction de la latitude et des déclinaisons de la Lune et du Soleil

1. On a donc $h = \Delta h_{L \text{ max}} (\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3}) + \Delta h_{S \text{ max}} (\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3})$

$$\text{or } \vec{TL} \cdot \vec{TM} = r d_L \cos \theta_L \text{ avec } \vec{TM} = \begin{cases} r \cos \lambda \cos \varphi \\ r \cos \lambda \sin \varphi \\ r \sin \lambda \end{cases} \text{ et } \vec{TL} = \begin{cases} d_L \cos \delta_L \cos \varphi_L \\ d_L \cos \delta_L \sin \varphi_L \\ d_L \sin \delta_L \end{cases}$$

donc $\cos \theta_L = \cos \lambda \cos \varphi \cos \delta_L \cos \varphi_L + \cos \lambda \sin \varphi \cos \delta_L \sin \varphi_L + \sin \lambda \sin \delta_L = \cos \lambda \cos \delta_L \cos \varphi_{LM} + \sin \lambda \sin \delta_L$

et $\cos^2 \theta_L - \frac{1}{3} = k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos \varphi_{LM}) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos 2\varphi_{LM})$

On obtient une expression "analogue" ($L \leftrightarrow S$) pour $\cos^2 \theta_S - \frac{1}{3}$

Finalement :

$$h = \left[\frac{\Delta h_{L \text{ max}} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_L) + k_2 (\sin 2\delta_L \cos \varphi_{LM}) + k_3 (\cos^2 \delta_L \cos 2\varphi_{LM})] + \dots}{\Delta h_{S \text{ max}} [k_1 (1 - 3 \sin^2 \delta_S) + k_2 (\sin 2\delta_S \cos \varphi_{SM}) + k_3 (\cos^2 \delta_S \cos 2\varphi_{SM})]} \right] \quad (6)$$

où :

$$\begin{cases} k_1 = \frac{1 - 3 \sin^2 \lambda}{6} \\ k_2 = \sin \lambda \cos \lambda \\ k_3 = \frac{\cos^2 \lambda}{2} \end{cases}$$

2. Différentes composantes

(a) L'expression de h comporte des composantes de différentes périodes en un lieu donné (λ donné) :

- les composantes semi-diurne lunaire (terme en $\cos 2\varphi_{LM}$ de période $12h24m$ -cf.3 de la sous-section 2.3) et semi-diurne solaire (terme en $\cos 2\varphi_{SM}$ de période $12h$), maximales à l'équateur et nulles aux pôles

- les composantes diurne lunaire (terme en $\cos \varphi_{LM}$ de période $24h48mn$) et diurne solaire (terme en $\cos \varphi_{SM}$ de période $24h$), maximales pour $\lambda = 45^\circ$ et nulles aux pôles et à l'équateur
 - des composantes à période "longue" ; au cours d'une période du mouvement apparent de la Lune ($\approx 1\text{mois}$), δ_L varie entre -28° et $+28^\circ$, tandis qu'au cours d'une période du mouvement apparent du Soleil ($\approx 1\text{an}$), δ_S varie entre -23° et $+23^\circ$; on note que l'amplitude des composantes à courtes périodes varie lentement avec δ_L et δ_S . On peut aussi remarquer que d_L et d_S varient lentement.
- (b) Considérons un lieu où les composantes semi-diurnes dominent ; nous avons vu plus haut que la composante lunaire est prépondérante et la relation (6) montre que son amplitude varie comme $\cos^2 \delta_L$; celle-ci varie donc avec une période semi-mensuelle. En outre, la composante semi-diurne solaire a une amplitude maximale pour $\delta_S = 0$ c'est-à-dire lorsque le Soleil se trouve dans le plan équatorial ce qui se produit aux équinoxes ; les marées de type semi-diurne lunaire sont donc renforcées par le Soleil aux équinoxes.
- (c) Lors des "grandes marées du siècle", T , L et S sont alignés dans le plan équatorial ; on a alors $\delta_L = \delta_S = 0$ auquel cas l'amplitude de marée est maximale ; cela se produit toutes les périodes chaldéennes en raison du mouvement de précession du plan de l'orbite apparente de la Lune de période environ 18 ans. Le plan de l'équateur précède également avec une période beaucoup plus longue (26000 ans) si bien qu'après une période chaldéenne la configuration astrale est presque la même mais jamais rigoureusement identique. Le phénomène des marées n'est donc pas rigoureusement périodique. Ajoutons à cela que des travaux récents (J. Laskar) montrent que le système solaire constitue un système dynamique chaotique !

4 Mise en défaut du modèle statique de marée

1. C'est l'échec du modèle statique de Newton !

La marée est une déformation de la surface des océans ; elle prend naissance dans les grands bassins océaniques (Atlantique, Pacifique...) en réponse à l'attraction des astres en mouvement ; cette déformation se comporte comme une onde de gravité ; le phénomène est donc fondamentalement dynamique.

Le problème est celui de la recherche du mouvement d'un fluide se déplaçant sur une sphère tournante dans des bassins peu profonds (quelques kilomètres par rapport aux milliers de kilomètres d'étendue), soumis à l'action périodique des astres, à l'action du globe terrestre composé d'une partie solide fixe et d'une partie mobile dont on étudie précisément le mouvement, aux contraintes visqueuses et aux conditions aux limites de parois solides aux formes compliquées. Il s'agit là d'un problème des plus difficiles ! [5]

L'amélioration du modèle passe donc par la prise en compte de différents facteurs dynamiques : la marée est une onde dont le caractère progressif apparaît nettement sur la figure 4 montrant le trajet de la pleine mer en Manche et en Mer du Nord. On constate que l'onde provient du bassin atlantique et que la pleine mer met à peu près 6 heures pour remonter la Manche soit un parcours d'environ 500 km, ce qui donne une célérité de l'ordre de 23 ms^{-1} ; la marée étant principalement semi-diurne, la longueur d'onde est de l'ordre de $23 \times 12 \times 3600 \approx 10^6 \text{ m} \approx 1000 \text{ km}$. Cette longueur d'onde est nettement supérieure à la profondeur du bassin ; on montre dans la partie B que la célérité des ondes de gravité en eau peu profonde ($\lambda \gg h$) est \sqrt{gh} ; cela donne une profondeur de l'ordre de 50m, ce qui est bien le cas.

D'autre part, les ondes de marée :

- voient leur progression contrariée par la présence des continents (réflexions, réfraction, diffraction)
- sont freinées par contrainte visqueuse sur les fonds de faible profondeur variable
- sont déviées par les forces de Coriolis (cf. figure 4 : la rotation produite sur l'onde de marée et l'existence de points amphidromiques sont typiques d'un effet dû aux forces de Coriolis (cf. ondes de Kelvin)[5])

L'amplitude de marée peut croître lorsque les ondes arrivent sur un plateau continental étendu de faible profondeur, à l'image d'une vague lorsqu'elle arrive sur la plage ; la faible profondeur du golfe Normand-Breton explique en partie les marnages importants qu'on y observe. (cf. figure 6 : on constate à certains endroits une amplitude de marée très supérieure aux 78 cm d'amplitude maximale prévus par la théorie statique).

Le potentiel, en un lieu donné, ne dépend que des mouvements astronomiques périodiques ; si on postule la linéarité du système ("petites" déformations), il est naturel de considérer un régime forcé où les périodes astronomiques se retrouvent dans celles des mouvements des masses d'eau. Chaque terme du potentiel peut être considéré indépendamment des autres, engendrant sa marée propre, la marée totale étant la somme de ces composantes élémentaires. En raison des conditions aux limites très complexes, il se crée un système compliqué d'ondes en partie progressives et en partie stationnaires ; on est en présence d'un oscillateur mécanique présentant un certain nombre de fréquences propres a priori différentes des fréquences du potentiel et forcé aux fréquences du potentiel ; on sait que la réponse est en général en retard (algébrique) sur l'excitation ; cela explique "l'établissement du port" ou "l'âge de la marée" observé sur la figure 5, ainsi que la présence des déphasages α et β apparaissant dans la formule de Laplace donnée dans l'énoncé. L'amplitude et le déphasage de la réponse à une composante du potentiel se déterminent expérimentalement compte tenu de l'extraordinaire difficulté de la résolution théorique du problème. Certains bassins (Manche, baie de Fundy...), suffisamment ouverts sur un océan pour subir l'influence de l'onde de marée (contrairement aux mers fermées comme la Méditerranée), se comportent comme des oscillateurs quasi-indépendants dont une fréquence propre est proche de la demi-journée ; la marée semi-diurne fait alors entrer ces bassins en résonance ce qui explique les marnages particulièrement élevés qu'on y observe (cf. figure 6).

La figure 3 montre certaines "familles" de marée présentant un caractère marqué :

- (a) marée de type semi-diurne : le terme en k_3 est prépondérant
- (b) marée de type diurne : le terme en k_2 est prépondérant
- (c) marée à inégalité diurne : marée de type semi-diurne avec un terme en k_2 non négligeable
- (d) marée mixte : marée de type semi-diurne avec un terme en k_3 non négligeable ; lorsque la déclinaison est faible, le terme semi-diurne devient prépondérant ($\sin 2\delta \ll 1$ et $\cos^2 \delta \approx 1$)

2. Méthode harmonique proprement dite (Kelvin, Doodson)

La théorie de Fourier justifie la décomposition de l'onde de marée en une série de composantes harmoniques ; l'ensemble de ces ondes harmoniques, chacune par sa période, son amplitude et sa phase constitue le spectre de la marée qui forme la carte d'identité de la marée dans le port considéré.

On passe le signal de marée expérimental à l'analyseur de spectre et on constate l'existence d'un très grand nombre de fréquences de poids plus ou moins important. Cette méthode est très efficace ; contrairement à la méthode de Laplace, elle prend notamment en compte les inévitables phénomènes non linéaires, en particulier dans les régions de faible profondeur. On peut ainsi interpréter la "tenue de plein" dans certains ports de La Manche comme Ouistreham ou Le Havre, par l'existence d'ondes sixième-diurnes qui provoquent une inégalité entre le montant et le perdant. Par exemple, le 12 décembre 1996, on a pu observer au Havre : une première BM de 1,17m à 06h29, puis une PM de 8,05m à 10h39, une BM de 8,02m à 11h23, une PM de 8,04m à 11h59 et enfin une BM de 1m à 18h54. La BM intermédiaire n'est pas une basse mer à proprement parler mais la mise en évidence de la tenue de plein à PM, favorable à la navigation. [6]

Pour les sites où la marée est importante, la prise en compte d'une centaine d'ondes composantes (ayant plus de 1mm d'amplitude) est nécessaire pour un calcul précis (105 à Brest)[6]. Compte tenu de la complexité du problème, ce spectre est établi expérimentalement par analyse des observations réalisées pendant quelques années ; il fournit par ailleurs un test pour les modèles théoriques.

Pour terminer, ajoutons que le facteur limitant est actuellement la météorologie. On observe en effet une surcote lorsqu'il y a une dépression et une décote en régime anticyclonique. La correction est d'environ 10 cm pour 10 hPa. Les vents forts ont également une influence.

5 Evolution séculaire du système Terre-Lune

5.1 Théorèmes généraux

1. Théorèmes de König

- (a) * Théorème de König du moment cinétique :

Le moment cinétique $\vec{\sigma}_O$ calculé en un point O quelconque d'un système matériel fermé S quelconque dans son mouvement par rapport à un référentiel R quelconque est la somme du moment cinétique en O dans R de son centre d'inertie G où serait concentrée toute sa masse m , soit $\vec{OG} \wedge m\vec{v}_G$ (moment

cinétique "d'ensemble"), et de son moment cinétique relativement à son référentiel barycentrique R^* , soit $\vec{\sigma}^*$ (moment cinétique "propre").

En effet, avec $\vec{v}_P = \vec{v}_P + \vec{v}_G$ (R^* est en mouvement de translation dans R), on a :

$$\vec{\sigma}_O = \iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) = \left(\iiint_S \vec{OP} \cdot dm(P) \right) \wedge \vec{v}_G + \iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{v}_P \cdot dm(P) = \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G + \vec{\sigma}_O^*$$

or $\vec{\sigma}_O^* = \vec{\sigma}^*$ (indépendant du point où on le calcule) car le torseur cinétique du système dans R^* est un couple ($\vec{p}^* = \vec{0}$). Donc :

$$\vec{\sigma}_O = \vec{OG} \wedge m\vec{v}_G + \vec{\sigma}^*$$

* Théorème de König de l'énergie cinétique :

L'énergie cinétique K d'un système matériel fermé S quelconque dans son mouvement par rapport à un référentiel R quelconque est la somme de son énergie cinétique d'ensemble (énergie cinétique de son centre d'inertie G où serait concentrée toute sa masse m , soit $\frac{1}{2}mv_G^2$) et de son énergie cinétique propre (son énergie cinétique relativement à son référentiel barycentrique R^* , soit K^*).

En effet,

$$K = \iiint_S \frac{v_P^2}{2} dm(P) = \iiint_S \left(\frac{v_G^2}{2} + \frac{v_P^2}{2} + \vec{v}_P \cdot \vec{v}_G \right) dm(P) = K^* + \frac{1}{2}mv_G^2 + \vec{v}_G \cdot \iiint_S \vec{v}_P \cdot dm(P)$$

or $\iiint_S \vec{v}_P \cdot dm(P) = \vec{p}^* = \vec{0}$, donc :

$$K = \frac{1}{2}mv_G^2 + K^*$$

(b) Si S est un solide dont l'axe $(G, \vec{\Omega})$ de rotation propre est une axe de symétrie matérielle donc axe principal d'inertie,

$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_G^* = \vec{J}_G \vec{\Omega}$ (\vec{J}_G est l'opérateur d'inertie du solide calculé en G et J est son moment d'inertie par rapport à l'axe $(G, \vec{\Omega})$)

$$(G, \vec{\Omega}) \text{ est axe de symétrie matérielle du solide } \Rightarrow \vec{\sigma}^* = J\vec{\Omega}$$

et comme $\vec{v}_P = \vec{\Omega} \wedge \vec{GP}$, $K^* = \frac{1}{2} \iiint_S \vec{v}_P \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{GP}) dm(P) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \iiint_S \vec{GP} \wedge \vec{v}_P dm(P) = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}^* = \frac{1}{2} \vec{\Omega} \cdot \vec{J}_G \vec{\Omega} = \frac{1}{2} J \Omega^2$ et ceci est vrai même si l'axe $(G, \vec{\Omega})$ n'est pas un axe principal d'inertie.

$$\text{Pour un solide : } K^* = \frac{1}{2} J \Omega^2$$

2. Théorème du moment cinétique

(a) Le moment dynamique barycentrique d'un système fermé quelconque est égal au moment résultant des forces extérieures calculé en son centre d'inertie; ce moment dynamique barycentrique est la dérivée temporelle du moment cinétique barycentrique.

En effet, d'après le PFDLD : $\vec{\delta}_G = \vec{M}_G(\text{forces extérieures}) + \vec{M}_G(\text{forces d'inertie d'entraînement})$
Les forces d'inertie de Coriolis sont nulles puisque R^* est en mouvement de translation par rapport à un référentiel galiléen

$$\text{De plus, } \vec{M}_G(\text{forces d'inertie d'entraînement}) = \iiint_S \vec{GP} \wedge (-\vec{a}_G dm) = - \left(\iiint_S \vec{GP} dm \right) \wedge \vec{a}_G = \vec{0}$$

$$\text{D'autre part, } \left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R^*} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_G^*}{dt} \right)_{R^*} = \iiint_S \left(\frac{d\vec{GP}}{dt} \right) \wedge \vec{v}_P dm(P) + \iiint_S \vec{GP} \wedge \vec{a}_P dm(P) = \iiint_S \vec{v}_P \wedge \vec{v}_P dm(P) + \vec{\delta}_G = \vec{\delta}_G$$

Enfin $\vec{\delta}_G = \vec{\delta}$ (indépendant du point où on le calcule) car le torseur dynamique du système dans R^* est un couple ($\vec{a}_G^* = \vec{0}$). Donc :

$$\vec{\delta} = \left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R^*} = \vec{M}_G(\text{forces extérieures})$$

(b) Le moment en G des forces d'inertie d'entraînement est nul

3. Théorème de la puissance cinétique

(a) On a :

$$\frac{dK}{dt} = P_{ext} + P_{int} + P_{inertie}$$

où P_{ext} est la puissance totale des forces extérieures, P_{int} est la puissance totale des forces intérieures et $P_{inertie}$ est la puissance totale des forces d'inertie d'entraînement (les forces de Coriolis ne travaillent pas).

(b) On a : $P_{int} = \iiint_S \vec{df}_{int}(P) \cdot \vec{v}_P$ relativement à un référentiel R et $P'_{int} = \iiint_S \vec{df}'_{int}(P) \cdot \vec{v}'_P$ relativement à un référentiel R'

avec $\vec{v}_P = \vec{v}_P + \vec{v}(P \in R'/R) = \vec{v}_P + \vec{v}(O' \in R'/R) + \vec{\Omega}(R'/R) \wedge \vec{OP}$, on obtient :

$$P_{int} = P'_{int} + \vec{v}(O' \in R'/R) \cdot \left(\iiint_S \vec{df}_{int}(P) \right) + \vec{\Omega}(R'/R) \cdot \left(\iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{df}_{int}(P) \right)$$

or $\iiint_S \vec{df}_{int}(P) = \vec{0}$ et $\iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{df}_{int}(P) = \vec{0}$ puisque le torseur des forces intérieures est nul; donc $P_{int} = P'_{int}$

$$\text{La puissance des forces intérieures est invariante par changement de référentiel}$$

(c) Relativement au référentiel barycentrique R^* du système, on a :

$$P_{inertie}^* = \iiint_S \vec{df}_{inertie}^*(P) \cdot \vec{v}_P^*$$

$$\text{avec } \vec{df}_{inertie}^*(P) = -dm(P)\vec{a}_G \text{ on obtient } P_{inertie}^* = -\vec{a}_G \cdot \iiint_S \vec{v}_P^* dm(P) = -\vec{a}_G \cdot \vec{p}^* = \vec{0}$$

$$\text{La puissance des forces d'inertie est donc nulle dans le référentiel barycentrique du système}$$

(d) O étant un point quelconque lié au solide et $\vec{\Omega}$ le vecteur rotation du solide dans le référentiel d'étude, on a :

$$P = \iiint_S \vec{df}(P) \cdot \vec{v}_P = \iiint_S \vec{df}(P) \cdot (\vec{v}_O + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) = \left(\iiint_S \vec{df}(P) \right) \cdot \vec{v}_O + \vec{\Omega} \cdot \left(\iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{df}(P) \right)$$

Or $\iiint_S \vec{df}(P) = \vec{R}$ (résultante des forces) et $\iiint_S \vec{OP} \wedge \vec{df}(P) = \vec{M}_O$ (moment résultant en O des forces)

Donc P est le comoment du torseur associé au champ de forces et du torseur cinématique du solide :

$$P = \vec{R} \cdot \vec{v}_O + \vec{M}_O \cdot \vec{\Omega}$$

5.2 Le problème à deux corps à symétrie matérielle sphérique

1. C est le barycentre de $T(m_T)$ et de $L(m_L)$; on a :

$$\vec{TC} = \frac{m_L}{m_T+m_L} \vec{TL} \text{ et } \vec{LC} = \frac{m_T}{m_T+m_L} \vec{LT}$$

2. En adaptant la relation (3), on obtient :

(a) $m\vec{a}(P/R_C^*) = \vec{F} + m\vec{h}_{T+L}(P) + m\vec{C}_S(P)$ où $\vec{h}_{T+L}(P) = \vec{h}_T(P) + \vec{h}_L(P)$ et $\vec{C}_S(P) = \vec{h}_S(P) - \vec{h}_S(C)$
Dans l'hypothèse où on néglige les effets gravitationnels différentiels produits par le Soleil, on obtient :

$$m\vec{a}(P/R_C^*) = \vec{F} + m\vec{h}_T(P) + m\vec{h}_L(P)$$

La relation fondamentale de la dynamique s'écrit dans R_C^* comme dans un référentiel galiléen à condition de ne considérer que les seules actions de la Terre et de la Lune comme forces d'origine gravitationnelle. R_C^* se comporte donc comme un référentiel pseudo-galiléen ce qui revient à considérer le système particule-Terre-Lune isolé.

3. Les mouvements de T et de L dans R_C^* sont donc définis par les équations :

$$m_T \vec{a}(T/R_C^*) = m_T \vec{h}_L(T) \text{ et } m_L \vec{a}(L/R_C^*) = m_L \vec{h}_T(L)$$

- (a) Avec $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{TL}$ et $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{TL}$, ces deux relations s'écrivent sous la forme commune :

$$\frac{m_L m_T}{m_T+m_L} \left(\frac{d^2 \vec{TL}}{dt^2} \right)_{R_C} = m_L \vec{h}_T(L)$$

C'est l'équation du mouvement dans R_C^* d'une particule située au point M tel que $\vec{CM} = \vec{TL} = \vec{r}$ (vecteur position relative de L par rapport à T), de masse $\mu = \frac{m_L m_T}{m_T+m_L}$, soumise à la force exercée par la Terre sur la Lune.

Les relations $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{r}$ et $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{r}$ montrent que les mouvements des points T et L se déduisent par homothétie de celui de cette particule réduite.

4. Avec $\vec{CT} = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{TL}$, $\vec{CL} = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{TL}$ et $\vec{v}_T = -\frac{m_L}{m_T+m_L}\vec{v}^*$, $\vec{v}_L = \frac{m_T}{m_T+m_L}\vec{v}^*$, on obtient :

$$K_{\text{orbital}}^* = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2$$

K_{orbital}^* s'identifie à l'énergie cinétique barycentrique de la particule réduite.

5. De même :

$$\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^*$$

6. $\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*$ ne dépend pas du point où on le calcule car la résultante du torseur cinétique du système des deux points, à savoir la quantité de mouvement totale est nulle dans R_C^* .

7. Éléments cinétiques du système Terre-Lune

- (a) $K^* = K^*(\text{Terre}) + K^*(\text{Lune})$

d'après les résultats précédents,

$$K^*(\text{Terre}) = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \text{ et } K^*(\text{Lune}) = \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

$$\text{donc } K^* = \frac{1}{2} m_T (\vec{v}_T^*)^2 + \frac{1}{2} m_L (\vec{v}_L^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2 = K_{\text{orbital}}^* + K_{\text{propre}}^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

Finalement :

$$K^* = K_{\text{orbital}}^* + K_{\text{propre}}^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

- (b) D'après les résultats précédents,

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_C^* = \vec{\sigma}_C^*(\text{Terre}) + \vec{\sigma}_C^*(\text{Lune})$$

et comme l'axe $(T, \vec{\Omega}_T)$ est un axe de symétrie matérielle, $\vec{\sigma}_C^*(\text{Terre}) = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + J_T \vec{\Omega}_T$

de même $\vec{\sigma}_C^*(\text{Lune}) = \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* + J_L \vec{\Omega}_L$

donc $\vec{\sigma}^* = \vec{CT} \wedge m_T \vec{v}_T^* + \vec{CL} \wedge m_L \vec{v}_L^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L = \vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* + \vec{\sigma}_{\text{propre}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L$

$$\vec{\sigma}^* = \vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* + \vec{\sigma}_{\text{propre}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L$$

8. $\vec{F}(\text{Terre} \rightarrow \text{Lune}) = m_L \vec{h}_T(L) = \frac{G m_T m_L}{(TL)^2} \vec{LT} = -\vec{\nabla}_L(E_P)$ où $E_P = -\frac{G m_T m_L}{TL}$

$$E_P = -\frac{G m_T m_L}{d_L}$$

9. * En appliquant le théorème du moment cinétique à la Terre dans son référentiel barycentrique R_T^* , on obtient :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt} \right)_{R_T^*} = \vec{M}_T(\text{forces exercées par la Lune}) = \vec{0}$$
 car la Terre et la Lune possèdent la symétrie sphérique (on associe les contributions des points symétriques par rapport à l'axe TL)

soit $J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_T^*} = J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_C} = \vec{0} \Rightarrow \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt} \right)_{R_C} = \vec{0}$

En appliquant le théorème du moment cinétique à la Lune dans son référentiel barycentrique R_L^* , on obtient de même :

$$\left(\frac{d\vec{\Omega}_L}{dt} \right)_{R_C} = \vec{0}$$

$$\vec{\Omega}_T^* \text{ et } \vec{\Omega}_L^* \text{ sont des vecteurs constants dans } R_C^*$$

$\vec{\sigma}_{\text{propre}}^* = J_T \vec{\Omega}_T^* + J_L \vec{\Omega}_L^*$ est donc constant dans R_C^*

* En appliquant le théorème du moment cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* , on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}^*}{dt} \right)_{R_C^*} = \left(\frac{d(\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* + \vec{\sigma}_{\text{propre}}^*)}{dt} \right)_{R_C^*} = \left(\frac{d\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^*}{dt} \right)_{R_C^*} = \vec{M}_C(\text{forces extérieures au système Terre-Lune}) = \vec{0}$$
 car on a vu plus haut que le système Terre-Lune se comporte comme un système isolé dans R_C^* ; donc

$$\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* \text{ est un vecteur constant dans } R_C^*$$

* En appliquant le théorème de la puissance cinétique au système Terre-Lune dans R_C^* , on obtient :

$$\frac{dK^*}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}} = \mathcal{P}_{\text{int}} = -\frac{dE_P}{dt} \text{ (le système Terre-Lune se comporte comme un système isolé dans } R_C^*)$$

donc $K^* + E_P = E^*$ est une constante du mouvement

$$L' \text{ énergie totale } E^* \text{ est une constante du mouvement}$$

10. $\vec{\sigma}_{\text{orbital}}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^*$ étant un vecteur constant dans R_C^* , \vec{r} et \vec{v}^* restent constamment orthogonaux à un vecteur donné (défini par les conditions initiales); la particule réduite a donc un mouvement plan

$$\text{Le mouvement relatif orbital est plan}$$

11. Période du mouvement relatif circulaire

- (a) La trajectoire de la particule réduite est un cercle de rayon $TL = d_L$; la RFD appliquée à cette particule réduite dans R_C^* donne : $\mu \omega^2 d_L = \frac{G m_T m_L}{d_L^2}$; la vitesse angulaire du mouvement orbital relatif est constante :

$$\omega = \sqrt{\frac{G(m_T + m_L)}{d_L^3}}$$

- (b) On trouve numériquement :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 27,2 \text{ jours solaires}$$

12. $\vec{\Omega}_L = \vec{\omega}$ donc

$$\text{La lune présente toujours la même face à la Terre}$$

13. * $\vec{\sigma}^* = \vec{r} \wedge \mu \vec{v}^* + J_T \vec{\Omega}_T + J_L \vec{\Omega}_L = (\mu \omega d_L^2 + J_T \Omega_T + J_L \Omega_L) \vec{z} = \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T + J_L \omega \right) \vec{z}$

Or, en supposant que la Terre et la Lune sont homogènes, on a $J_T = \frac{2}{5} m_T r_T^2$ et $J_L = \frac{2}{5} m_L r_L^2$

$$\text{donc } \frac{J_T \omega}{m_T} \simeq \frac{m_L}{m_T} \left(\frac{r_L}{r_T} \right)^2 \frac{\omega}{\Omega_T} \simeq 3,4 \cdot 10^{-5}$$

Le moment cinétique propre de la Lune est donc parfaitement négligeable devant celui de la Terre; on a donc, avec une excellente approximation :

$$\vec{\sigma}^* = \left(m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T + m_L)}} + J_T \Omega_T \right) \vec{z} \quad (7)$$

$$* K^* = \frac{1}{2} \mu (\vec{v}^*)^2 + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2 = \frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 + \frac{1}{2} J_L \Omega_L^2$$

En négligeant l'énergie cinétique propre de la Lune devant celle de la Terre, on obtient, avec une excellente approximation :

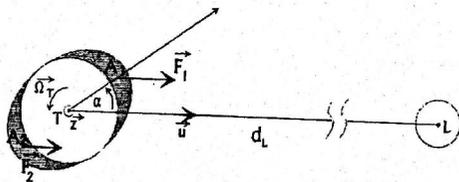
$$E^* = K^* + E_P = -\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \quad (8)$$

5.3 Effets séculaires de synchronisation des phénomènes dissipatifs de marée

1. Le fluide est entraîné par la contrainte de cisaillement exercée au fond par la partie solide de la Terre en raison de la viscosité du fluide (celui-ci "adhère" à la paroi solide)

2. Considérons pour ce calcul que la Terre et la Lune possèdent la symétrie sphérique.

Le moment résultant des forces qu'exerce la Lune sur la partie de la Terre à symétrie sphérique est nul (on associe les contributions des points symétriques par rapport à l'axe TL). En revanche, les forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 s'exerçant sur les deux "bulbes" (grisés sur la figure ci-dessous) ont un moment résultant non nul puisqu'elles ont des intensités légèrement différentes. Le champ gravitationnel créé par la Lune étant toutefois quasi uniforme à l'échelle de la Terre, ces forces sont donc quasi équivalentes, pour chacun de ces deux bulbes, à une force unique, la résultante appliquée à son centre d'inertie i.e sur l'axe de la déformation en un point situé à une distance pratiquement égale à r_T ($a \approx b \approx r_T$ et $a - b \approx \Delta h_{L,max} \approx 54cm$ -cf. résultat de la question 2 de la sous-section 3.2); les effets de ces deux forces \vec{F}_1 et \vec{F}_2 se contrarient mais l'effet de \vec{F}_1 i.e l'effet de freinage l'emporte car son intensité est légèrement supérieure à celle de \vec{F}_2 . (cf. figure ci-dessous)



3. Les deux bourrelets ont même masse : $\frac{1}{2}\rho(\frac{4}{3}\pi ab^2 - \frac{4}{3}\pi b^3) \approx \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2(a-b) \approx \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2\Delta h_{L,max}$ où a (resp. b) est le demi-grand axe (resp. le demi-petit axe) de l'ellipsoïde.

Donc $\vec{F}_1 \approx \frac{Gm_L \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L,max}}{(LA_1)^2} \vec{u}$ avec $(LA_1)^2 \approx d_L^2 + r_T^2 - 2d_L r_T \cos \alpha$, donc $\vec{F}_1 \approx \frac{Gm_L \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L,max}}{d_L^2} (1 + 2\frac{r_T}{d_L} \cos \alpha) \vec{u}$ (\vec{u} unitaire), de la forme $\vec{F}_1 = F_1 \vec{u}$

De même $\vec{F}_2 \approx \frac{Gm_L \frac{2}{3}\rho\pi r_T^2 \Delta h_{L,max}}{d_L^2} (1 - 2\frac{r_T}{d_L} \cos \alpha) \vec{u} = F_2 \vec{u}$

Le moment de \vec{F}_1 par rapport à T est $\vec{T}\vec{A}_1 \wedge \vec{F}_1 \approx -F_1 r_T \sin \alpha \vec{z}$ et celui de \vec{F}_2 par rapport à T est $\vec{T}\vec{A}_2 \wedge \vec{F}_2 \approx F_2 r_T \sin \alpha \vec{z}$

Le moment résultant par rapport à T des forces exercées par la Lune est donc : $\vec{M}_T = \vec{T}\vec{A}_1 \wedge \vec{F}_1 + \vec{T}\vec{A}_2 \wedge \vec{F}_2 \approx -\frac{Gm_L \frac{4}{3}\rho\pi r_T^4 \Delta h_{L,max}}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}$

Avec $\Delta h_{L,max} \approx \frac{3}{2} r_T \frac{m_L}{m_T} (\frac{r_T}{d_L})^3$ (cf. résultat de la question 2 de la sous-section 3.2), on obtient finalement :

$$\vec{M}_T = -\frac{B}{d_L^6} \sin 2\alpha \vec{z} \text{ avec } B \approx 2\pi G \rho r_T^8 \frac{m_L^2}{m_T} \quad (9)$$

4. On trouve numériquement $B \approx 10^{69} SI$; avec $B \sin 2\alpha \approx 1,35.10^{68} SI$, on obtient :

$$\alpha \approx 3,9^\circ$$

Remarque 8 Un calcul plus précis prenant en compte le champ de marée (calcul de $\vec{M}_T = \iiint_{Terre} \vec{r} \wedge \vec{P}$) donne $\alpha \approx 6,5^\circ$

5. Solution séculaire

(a) La solution exacte de l'équation différentielle est :

$$X = X_0 \exp[\varepsilon(\omega t + \sin \omega t)]$$

(b) Appliquons la relation (10) :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_{sec} = \langle f \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} \quad (10)$$

Dans le mouvement non perturbé, $X = \text{constante}$; donc $\langle \varepsilon \omega X (1 + \cos \omega t) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \varepsilon \omega X$

Par conséquent, $\left(\frac{dX}{dt}\right)_{sec} = \varepsilon \omega X$ donc :

$$X_{sec} = X_0 \exp(\varepsilon \omega t)$$

(c) Aux temps "longs" ($\omega t \gg 1$), la solution exacte tend vers la solution séculaire; celle-ci "gomme" les variations "rapides" de la solution exacte.

6. * Appliquons le théorème du moment cinétique au bourrelet dans son référentiel barycentrique R_T^* :

$\vec{0} = \vec{M}_T(Lune \rightarrow bourrelet) + \vec{M}_T(Terre \rightarrow bourrelet)$ car la masse du bourrelet est négligée autrement dit, le bourrelet "transmet les efforts" : $\vec{M}_T(bourrelet \rightarrow Terre) = \vec{M}_T(Lune \rightarrow bourrelet) = \vec{M}_T$

* Appliquons le théorème du moment cinétique à la partie solide de la Terre dans son référentiel barycentrique R_C^* :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{M}_T(bourrelet \rightarrow Terre) + \vec{M}_T(Lune \rightarrow Terre) = \vec{M}_T + \vec{0} = \vec{M}_T = \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_C^*}$$

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_T^*} = \vec{M}_T$$

* Appliquons le théorème du moment cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* :

$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{0}$ puisque le système Terre-Lune peut-être considéré comme isolé dans R_C^* ; donc :

$$\left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T + \vec{\sigma}_{orbital})}{dt}\right)_{R_C^*} = \vec{0} = \vec{M}_T + \left(\frac{d\vec{\sigma}_{orbital}}{dt}\right)_{R_C^*}$$

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}_{orbital}}{dt}\right)_{R_C^*} = -\vec{M}_T$$

On constate donc que le phénomène de marée couple le mouvement de rotation propre de la Terre et le mouvement relatif orbital Terre-Lune

* Appliquons le théorème de la puissance cinétique à la Terre (y compris le bourrelet) dans son référentiel barycentrique R_T^* :

$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2) = P_{int} + P_{ext}$ avec $P_{int} = P_{dis}$ (puissance totale des forces de frottement à l'interface bourrelet-partie solide)

et $P_{ext} = P(Lune \rightarrow partie solide sphérique) + P(Lune \rightarrow bourrelet) = 0 + \vec{M}_T \cdot \vec{\omega}$. Donc :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2) = P_{dis} + \vec{M}_T \cdot \vec{\omega}$$

En multipliant scalairement par $\vec{\Omega}_T$ le théorème du moment cinétique appliqué à la Terre, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(\frac{1}{2} J_T \Omega_T^2) = \vec{M}_T \cdot \vec{\Omega}_T$$

On en déduit :

$$P_{int} = \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})$$

* Appliquons le théorème de la puissance cinétique au système Terre-Lune dans son référentiel barycentrique R_C^* :

$\frac{dK^*}{dt} = \mathcal{P}'_{int} + \mathcal{P}'_{ext}$ avec $\mathcal{P}'_{int} = \mathcal{P}_{dis} + \mathcal{P}(Terre \leftrightarrow Lune) = \mathcal{P}_{dis} - \frac{dE_P}{dt}$ et $\mathcal{P}'_{ext} = 0$ (le système Terre-Lune peut-être considéré comme isolé dans R_C); donc :

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{d(K^* + E_P)}{dt} = \mathcal{P}_{dis} = \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})$$

7. Au sens des évolutions séculaires :

(a) En utilisant les résultats de la question précédente et en appliquant la procédure perturbative, on obtient :

$$\left(\frac{d\vec{\sigma}}{dt}\right)_{sec} = \vec{0}, \left(\frac{d\vec{\sigma}_{orbital}}{dt}\right)_{sec} = - \langle \vec{M}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}, \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{sec} = \langle \vec{M}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}$$

$$\left(\frac{dE^*}{dt}\right)_{sec} = \langle \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}}$$

Or dans le mouvement non perturbé, on a vu que $\vec{\omega} = \omega \vec{z} = \sqrt{\frac{G(m_T+m_L)}{d_L^3}} \vec{z}$, $\vec{\Omega}_T = \Omega_T \vec{z}$, d_L et donc $\vec{M}_T = M_T \vec{z} = -\frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}$ sont constants, donc $\langle \vec{M}_T \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \vec{M}_T = -\frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \vec{z}$ (cf. relation 9) et

$$\langle \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \rangle_{\text{mouvement non perturbé}} = \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega})$$

En supposant qu'en moyenne à une échelle de temps grande devant la période du mouvement non perturbé l'orbite relative reste circulaire, on peut utiliser les expressions (7) et (8) de $\vec{\sigma}^*$ et E^* ; on obtient donc, au sens des évolutions séculaires :

* relativement au moment cinétique et en projection sur \vec{z} :

$$\frac{d\sigma_z^*}{dt} = \frac{d}{dt} (m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T+m_L)}} + J_T \Omega_T) = \frac{d}{dt} (m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T+m_L)}}) + \frac{d}{dt} (J_T \Omega_T) = 0 \text{ soit encore}$$

$$\frac{d}{dt} (m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T+m_L)}}) - \frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha = 0 \text{ et finalement :}$$

$$\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} = \frac{2B \sin 2\alpha}{m_T m_L} \sqrt{\frac{(m_T+m_L)}{G}} d_L^{-\frac{3}{2}}$$

* relativement à l'énergie totale :

$$\frac{dE^*}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} + \frac{1}{2} J_T \Omega_T^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} \right) + \Omega_T J_T \frac{d(\Omega_T)}{dt} = M_T \Omega_T - M_T \omega$$

après simplification ($\Omega_T J_T \frac{d(\Omega_T)}{dt} = M_T \Omega_T$), on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} \frac{G m_T m_L}{d_L} \right) = -M_T \omega = \frac{B}{d_L^2} \sin 2\alpha \sqrt{\frac{G(m_T+m_L)}{d_L^3}}$$

soit finalement la même équation en d_L . Les équations du mouvement séculaire sont donc bien compatibles avec une orbite relative qui évolue lentement en restant circulaire

(b) La loi d'évolution séculaire de cette orbite est donc :

$$\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} = \frac{2B \sin 2\alpha}{m_T m_L} \sqrt{\frac{(m_T+m_L)}{G}} d_L^{-\frac{3}{2}}$$

(c) Avec $B = 1,35.10^{68} SI$, on trouve $\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} \simeq 1,13.10^{-9} m.s^{-1} \simeq 3,6 \text{ cm/an}$

La Lune s'éloigne donc lentement de la Terre à raison de 3,6cm par an

ce qui est en accord avec les mesures

(d) Comme $\omega = \sqrt{\frac{G(m_T+m_L)}{d_L^3}}$, la croissance de d_L entraîne une diminution de ω

La vitesse angulaire ω du mouvement orbital relatif décroît

(e) On a montré plus haut les relations suivantes :

$$\frac{dE^*}{dt} = \mathcal{P}_{dis} = \vec{M}_T \cdot (\vec{\Omega}_T - \vec{\omega}) \text{ et } \left(\frac{d(J_T \vec{\Omega}_T)}{dt}\right)_{R_C} = \vec{M}_T = J_T \left(\frac{d\vec{\Omega}_T}{dt}\right)_{R_C}$$

on en déduit :

$$\frac{dE^*}{dt} = J_T (\Omega_T - \omega) \frac{d\Omega_T}{dt} = \mathcal{P}_{dis} \tag{11}$$

(f) Les phénomènes dissipatifs font décroître l'énergie totale E^* du système Terre-Lune ($\mathcal{P}_{dis} < 0$); comme $\Omega_T > \omega$, $d\Omega_T < 0$

La vitesse angulaire Ω_T de rotation propre de la Terre décroît

ce qui est conforme avec l'effet de freinage mis qualitativement en évidence plus haut.

(g) Au "point final" de cette évolution séculaire, d_L ne varie plus; d'après les résultats des questions précédentes, on obtient donc (les grandeurs dans l'état final sont indicées par f) :

$$\omega_f = \text{constante} = \sqrt{\frac{G(m_T+m_L)}{d_{L,f}^3}}$$

$$\left(\frac{d(d_L)}{dt}\right)_{sec} = 0 \Rightarrow \alpha_f = 0 \Rightarrow \vec{M}_T = \vec{0} \Rightarrow \Omega_T = \text{constante} = \Omega_T \text{ et } \mathcal{P}_{dis} = 0$$

D'autre part, la dissipation trouvant son origine dans la différence entre ω et Ω_T , il est clair que dans l'état final où la dissipation d'énergie a disparu, on a $\omega_f = \Omega_T$. Dans le modèle utilisé, le glissement relatif entre le "solide" océan et la partie solide de la Terre a disparu (en réalité les contraintes visqueuses ne travaillent plus).

Le "point" final de l'évolution du système Terre-Lune est caractérisé par la synchronisation du mouvement de rotation propre de la Terre sur le mouvement orbital relatif ($\omega_f = \Omega_T$). L'axe du double bourrelet océanique est alors confondu avec la direction Terre-Lune ($\alpha_f = 0$); les contraintes visqueuses ne travaillent plus; la dissipation d'énergie a disparu.

(h) Par conservation du moment cinétique total, on a d'après la relation (7) :

$$m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T+m_L)}} + J_T \Omega_T = m_T m_L \sqrt{\frac{G d_{L,f}}{(m_T+m_L)}} + J_T \Omega_T$$

soit, en négligeant Ω_T devant Ω_T :

$$m_T m_L \sqrt{\frac{G d_L}{(m_T+m_L)}} + J_T \Omega_T = m_T m_L \sqrt{\frac{G d_{L,f}}{(m_T+m_L)}}$$

avec $J_T \simeq \frac{2}{5} m_T r_T^2$, on obtient :

$$\frac{d_{L,f}}{d_L} = \left(1 + \frac{2}{5} \frac{r_T^2}{m_L} \sqrt{\frac{(m_T+m_L)}{G d_L}} \Omega_T \right)^2 \simeq 1,56$$

Puis, avec $\omega = \sqrt{\frac{G(m_T+m_L)}{d_L^3}}$, on obtient :

$$\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{\Omega_T}{\omega} = \left(\frac{d_L}{d_{L,f}}\right)^{\frac{3}{2}} \simeq 0,515$$

Le jour solaire de l'état final sera :

$$T_f = \frac{2\pi}{\Omega_T} \simeq \frac{27,322}{0,515} \simeq 53 \text{ jours solaires actuels}$$

N.B : Ω_T est bien négligeable devant Ω_T puisque $\Omega_T / \Omega_T \simeq 0,019$

En injectant la valeur de Ω_T trouvée précédemment dans la relation de conservation du moment cinétique et ainsi de suite, on obtient les chiffres significatifs stables suivants après deux itérations :

$$\frac{d_{L,f}}{d_L} \simeq 1,545$$

$$\frac{\omega_f}{\omega} = \frac{\Omega_T}{\omega} \simeq 0,520 \text{ et } T_f = \frac{2\pi}{\Omega_T} \simeq 52,49 \text{ jours actuels}$$

- (i) Le mouvement de rotation propre de la Lune est actuellement synchronisé sur le mouvement orbital relatif ($\Omega_L = \omega$); on peut penser que c'est l'aboutissement d'un mécanisme désormais achevé de synchronisation comme celui que nous venons d'étudier; or il est clair que ce mécanisme est d'autant plus efficace (donc plus rapide) que la puissance dissipée est grande. La puissance dissipée par petite déformation d'un corps solide étant faible, il est légitime de soupçonner que la rapidité du phénomène de synchronisation est au moins en partie imputable au caractère visqueux d'une partie de la Lune en mouvement relatif par effet de marée par rapport à sa partie solide (dissipation par travail de contraintes visqueuses).

PARTIE B : ONDES DE SURFACE LIBRE D'UN LIQUIDE

1 Analyse dimensionnelle de la compétition entre les effets de gravité et de capillarité

1.1 On ne prend en compte que les effets de pesanteur (on néglige les effets de tension superficielle)

$$1. \left. \begin{array}{l} P_A = P_C = P_0 \\ P_B \simeq P_0 + \mu g H \end{array} \right\} \Rightarrow P_B \simeq P_A + \mu g H > P_A$$

L'eau va donc se déplacer de B vers A

Le creux devient bosse et la bosse devient creux... il y a propagation de l'onde de gravité

2. Les paramètres pertinents du problème sont g , λ et μ ; on a donc

$$c_V = \alpha g^a \lambda^b \mu^d \quad (12)$$

$$\left. \begin{array}{l} [c_V] = LT^{-1} \\ [g^a \lambda^b \mu^d] = (LT^{-2})^a L^b (ML^{-3})^d = L^{a+b-3d} T^{-2a} M^d \end{array} \right\} \Rightarrow a = b = \frac{1}{2} \text{ et } d = 0$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{c_V = \alpha \sqrt{g \lambda}}$$

3. Qualitativement, dans l'équation du mouvement $\vec{F} = m\vec{a}$, la masse intervient dans les deux membres de l'équation ($\vec{F} = m\vec{g}$) et s'élimine; par conséquent μ n'intervient pas.

1.2 On ne prend en compte que les effets de tension superficielle (on néglige les effets de pesanteur)

1. D'après la relation de Laplace :

$$P - P_0 = -\frac{\gamma}{R} \quad (13)$$

$$\left. \begin{array}{l} P_A - P_0 = -\frac{\gamma}{R(A)} = \frac{\gamma}{R(C)} \\ P_C - P_0 = -\frac{\gamma}{R(C)} \\ P_B = P_C \end{array} \right\} \Rightarrow P_B = P_A - 2\frac{\gamma}{R(C)} > P_A \text{ car } R(C) = \left[\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right) (C) \right]^{-1} < 0$$

L'eau va donc se déplacer de B vers A; le mécanisme de capillarité agit dans le même sens que la gravité. Le creux devient bosse et la bosse devient creux... il y a propagation de l'onde de capillarité

2. Les paramètres pertinents sont μ , λ et γ ; donc $c_S = \alpha' \mu^{a'} \lambda^{b'} \gamma^{d'}$; en remarquant que γ est homogène à une force par unité de longueur, on a :

$$\left. \begin{array}{l} [c_S] = LT^{-1} \\ [\mu^{a'} \lambda^{b'} \gamma^{d'}] = (ML^{-3})^{a'} L^{b'} (MT^{-2})^{d'} = M^{a'+d'} L^{-3a'+b'} T^{-2d'} \end{array} \right\} \Rightarrow a' = b' = -\frac{1}{2} \text{ et } d' = \frac{1}{2}$$

Par conséquent, on obtient :

$$\boxed{c_S = \alpha' \sqrt{\frac{\gamma}{\mu \lambda}}}$$

1.3 Longueur capillaire; nombre de Bond

1. (a) l_C est l'unique grandeur homogène à une distance que l'on puisse définir à partir des grandeurs γ , μ et g . En effet :

$$l_C = \gamma^{\alpha''} \mu^{\beta''} g^{\gamma''} \Rightarrow [l_C] = L = (MT^{-2})^{\alpha''} (ML^{-3})^{\beta''} (LT^{-2})^{\gamma''}; \text{ on trouve :}$$

$$\boxed{l_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}}$$

(b) Dans le cas de l'eau, on calcule :

$$l_C \simeq 2,7 \text{ mm}$$

$$2. R(C) = \left[\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) (C) \right]^{-1}$$

En termes d'ordres de grandeur (odg), on a : $R(C) \sim - \left[\frac{H/2}{(\lambda/2)^2} \right]^{-1}$, soit :

$$R(C) \sim - \left[\frac{\lambda^2}{H} \right]$$

(Le facteur 2 est non significatif en termes d'odg et n'est pas pris en compte)

(a) En négligeant les phénomènes de capillarité, on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$[P_B - P_A]_V \sim \mu g H$$

En négligeant la gravité, on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$[P_B - P_A]_S = - \frac{2\gamma}{R(C)} \sim - \frac{\gamma}{-\left[\frac{\lambda^2}{H}\right]} \sim \frac{\gamma H}{\lambda^2}$$

(Le facteur 2 est non significatif en termes d'odg et n'est pas pris en compte)

On remarque donc que :

$$\frac{[P_B - P_A]_V}{[P_B - P_A]_S} \sim \frac{\mu g \lambda^2}{\gamma} = \left(\frac{\lambda}{l_C} \right)^2 = B_0 \quad (14)$$

On a vu que la surpression $P_B - P_A$ constitue le "moteur" du phénomène de rappel assurant la propagation de l'onde; le nombre de Bond, rapport des surpressions grave et capillaire, mesure donc la "balance" entre les effets de volume (gravité) et de surface (capillarité).

* Onde de gravité :

Lorsque $B_0 \gg 1$ soit $\lambda \gg l_C$, l'onde est contrôlée par la gravité (les effets de tension superficielle sont négligeables); la célérité de l'onde est alors $c \simeq c_V$

(b) * Onde de capillarité :

Lorsque $B_0 \ll 1$ soit $\lambda \ll l_C$, l'onde est contrôlée par la capillarité (les effets de gravité sont négligeables); la célérité de l'onde est alors $c \simeq c_S$

* Onde de gravité :

Lorsque $B_0 \gg 1$ soit $\lambda \gg l_C$, on vérifie que $\frac{c_V}{c_S} \sim \sqrt{\frac{\mu g \lambda^2}{\gamma}} \sim \frac{\lambda}{l_C} \gg 1$

(c) * Onde de capillarité :

Lorsque $B_0 \ll 1$ soit $\lambda \ll l_C$, on vérifie que $\frac{c_V}{c_S} \sim \sqrt{\frac{\mu g \lambda^2}{\gamma}} \sim \frac{\lambda}{l_C} \ll 1$

2 Equations générales des ondes linéaires

2.1 Généralités

1. Approximation hydrodynamique

(a) Cette approximation consiste à traiter le fluide comme un milieu continu

L'échelle mésoscopique est intermédiaire entre les échelles microscopique et macroscopique. Les grandeurs locales de la mécanique des milieux continus sont nivelées i.e moyennées spatialement sur un petit élément de volume entourant le point considéré; cet élément de volume est petit à notre échelle (mesure locale) mais grand à l'échelle des molécules (typiquement $(10 \text{ nm})^3$).

(b) Un milieu peut être considéré comme continu si le libre parcours moyen l des particules qui le constituent est petit devant la taille caractéristique L de ce milieu, i.e si le nombre de Knudsen $\frac{l}{L}$ est petit devant 1.

2. Dérivées lagrangienne et eulérienne

(a) En variables d'Euler, on considère l'évolution de la grandeur physique en un point donné de l'espace; cette grandeur concerne les différentes particules passant au point considéré au cours du temps. En variables de Lagrange, on considère l'évolution de la grandeur physique d'une particule matérielle déterminée qu'on suit dans son mouvement.

$$(b) \frac{\partial G}{\partial t}(M, t) = \text{dérivée eulérienne de } G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M, t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right)$$

$$\frac{DG}{Dt}(M, t) = \text{dérivée lagrangienne de } G = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M', t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right)$$

où M' est la position à l'instant $t + \Delta t$ de la particule se trouvant en M à l'instant t

On a $M'(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ et $M(x, y, z)$ avec $\vec{v}(M, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{z} \right)$

$$\text{donc } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{G(M', t + \Delta t) - G(M, t)}{\Delta t} \right) = \frac{\partial G}{\partial t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\partial G}{\partial x} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial G}{\partial z} \frac{\Delta z}{\Delta t} \right)$$

$$= \frac{\partial G}{\partial t} + v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z}$$

Finalement :

$$\frac{DG}{Dt} = \frac{\partial G}{\partial t} + v_x \frac{\partial G}{\partial x} + v_y \frac{\partial G}{\partial y} + v_z \frac{\partial G}{\partial z} = \frac{\partial G}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) G$$

3. Soit $M(t)$ la masse de la matière contenue à l'instant t dans un volume \mathcal{V} limité par une surface de contrôle S fixe (système ouvert).

La masse d'un système fermé étant conservative, on a :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt}$$

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_{\mathcal{V}} \mu d\tau = \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau$$

et la masse entrant dans \mathcal{V} pendant dt par un élément de surface dS est $\mu dt \vec{v} \cdot d\vec{S}_e$ où $d\vec{S}_e$ est le vecteur élément de surface entrant (dirigé vers l'intérieur); donc :

$$\frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt} = \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S}_e = - \iint_S \mu \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad (\text{où } d\vec{S} \text{ est "ostrogradskien" i.e dirigé vers l'extérieur})$$

$$\text{soit } \frac{\delta M_{\text{entrant par convection}}}{dt} = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mu \vec{v}) d\tau$$

$$\text{On a donc à toute échelle de volume } \mathcal{V} : \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mu}{\partial t} d\tau = - \iiint_{\mathcal{V}} \text{div}(\mu \vec{v}) d\tau$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} + \text{div}(\mu \vec{v}) = 0 = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \cdot \text{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu$$

$$\text{or } \frac{D\mu}{Dt} = \frac{\partial \mu}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \mu = \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu$$

Finalement :

$$\frac{D\mu}{Dt} + \mu \cdot \text{div} \vec{v} = 0 \quad (15)$$

2.2 Equation du mouvement

1. L'équation d'Euler est le théorème de la résultante dynamique appliqué à une particule fluide dans les conditions de l'énoncé; le référentiel d'étude est galiléen; les seules forces à distance sont les actions de pesanteur; les forces de contact sont les forces de pression puisque l'écoulement est parfait (la viscosité de cisaillement η est nulle) et incompressible (la deuxième viscosité de volume ζ n'intervient pas puisque $\text{div} \vec{v} = 0$). On sait que les forces de pression équivalent à une distribution de forces de densité volumique $-\text{grad} P$. On a donc :

$$\mu \vec{a} = \mu \frac{D\vec{v}}{Dt} = \mu \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right] = \mu \vec{g} - \text{grad} P \quad (16)$$

2. Au cours d'une période T d'oscillation des particules dans l'onde, ces particules parcourent une distance de l'ordre de a ; l'ordre de grandeur de la vitesse de leur mouvement est donc $V \sim \frac{a}{T}$; d'autre part l'échelle spatiale caractéristique de variation de cette vitesse dans l'onde est $\lambda = cT$. Donc :

$$a \ll \lambda \Leftrightarrow V \ll c$$

3. $\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\| \sim \frac{V}{T}$ et $\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\| \sim \frac{V^2}{\lambda}$ donc $\frac{\|(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}\|}{\|\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}\|} \sim \frac{V}{c} \ll 1$

A cet ordre d'approximation, l'équation d'Euler s'écrit donc :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \mu \vec{g} - \text{grad} P$$

4. Incompressibilité de l'écoulement

- (a) En considérant en termes d'ordre de grandeur l'équation d'Euler linéarisée (selon la direction de propagation de l'onde), on obtient :

$$\mu \frac{V}{T} \sim \frac{\Delta P}{\lambda} \text{ soit}$$

$$\Delta P \sim \frac{\lambda \mu V}{T} \sim \mu c V$$

- (b) (15) $\Rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu + \mu \cdot \text{div} \vec{v} = 0$
En exploitant la relation :

$$\Delta P = c_{son}^2 \Delta \mu \quad (17)$$

on a, en termes d'ordres de grandeur :

$$\left| \frac{\partial \mu}{\partial t} \right| \sim \frac{\Delta \mu}{T} \sim \frac{c \Delta \mu}{\lambda} \sim \frac{c \Delta P}{\lambda c_{son}^2} \sim \frac{\mu V}{\lambda} \frac{c^2}{c_{son}^2}$$

$$\left| \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu \right| \sim \frac{V \Delta \mu}{\lambda} \sim \frac{V \Delta P}{\lambda c_{son}^2} \sim \frac{\mu V}{\lambda} \frac{c^2}{c_{son}^2} \frac{V}{c}$$

$$\left| \mu \cdot \text{div} \vec{v} \right| \sim \mu \frac{V}{\lambda}$$

$$(V \ll c \ll c_{son}) \Rightarrow \frac{\left| \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|}{\left| \mu \cdot \text{div} \vec{v} \right|} \sim \frac{V}{c} \ll 1 \text{ et } \frac{\left| \frac{\partial \mu}{\partial t} \right|}{\left| \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \mu \right|} \sim \frac{c^2}{c_{son}^2} \ll 1$$

donc (15) se simplifie en :

$$(V \ll c \ll c_{son}) \Rightarrow \text{div} \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \text{écoulement incompressible}$$

L'équation (15) donne alors $\frac{D\mu}{Dt} = 0$

La masse volumique de toutes les particules fluides se conservent donc sur leurs trajectoires; le fluide étant initialement homogène, la masse volumique est initialement uniforme et donc le reste.

$$\mu \text{ est donc une constante indépendante de } M \text{ et de } t$$

- (c) L'incompressibilité d'un fluide non confiné tient à la tendance des molécules à se partager l'espace disponible; si une action vient localement contrarier cette tendance, les molécules s'en informent de proche en proche, et cela avec une vitesse c_{son} ; par suite, si la célérité du son est très grande devant les vitesses caractéristiques V et c de l'écoulement considéré, on peut considérer que l'ensemble des molécules réagissent instantanément à cette action et donc que le fluide ne révèle pas son caractère compressible dans ces conditions.

(d)

$$\text{Dans l'eau : } c_{son} \approx 1400 \text{ m.s}^{-1}$$

5. En général, les inconnues sont \vec{v} , P et μ (5 inconnues scalaires) et les relations mécaniques (15) et (16) fournissent 4 relations scalaires; il faut donc ajouter une hypothèse thermodynamique pour résoudre le problème (prise en compte des éventuels transferts entre les formes macroscopiques de l'énergie et ses formes microscopiques).

Dans le cas d'un écoulement parfait incompressible, μ restant constant est connu ce qui réduit à 4 le nombre d'inconnues scalaires; les relations mécaniques (15) et (16) permettent à elles-seules de résoudre le problème; cela traduit le découplage entre les variables mécaniques et thermiques.

6. Avec $\mu = \text{constante}$ et $\vec{g} = -\text{grad}(gz)$, l'équation d'Euler linéarisée s'écrit :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{P}{\mu} + gz \right) = \vec{0}$$

En prenant le rotationnel de la relation précédente, on obtient $\frac{\partial(\text{rot} \vec{v})}{\partial t} = \vec{0}$
 $\text{rot} \vec{v}$ est donc indépendant de t , donc égal à sa valeur moyenne temporelle $\langle \text{rot} \vec{v} \rangle$
Donc $\text{rot} \vec{v} = \langle \text{rot} \vec{v} \rangle = \text{rot} \langle \vec{v} \rangle = \vec{0}$ (dans un tel mouvement vibratoire périodique la valeur moyenne temporelle de la vitesse est nulle)

L'écoulement est donc irrotationnel à cet ordre d'approximation ($\text{rot} \vec{v} = \vec{0}$)

7. Donc $\exists \varphi$ tel que $\vec{v} = \text{grad} \varphi$
Avec $\text{div} \vec{v} = 0$, on obtient :

$$\Delta \varphi = 0 \quad (18)$$

L'équation d'Euler s'écrit alors :

$$\frac{\partial(\text{grad} \varphi)}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{P}{\mu} + gz \right) = \vec{0} = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz \right) \text{ donc :}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\mu} + gz = f(t) \quad (19)$$

$f(t)$ étant une fonction du temps

2.3 Conditions aux limites cinématiques

1. L'écoulement étant parfait (viscosité négligée), les c.a.l cinématiques expriment la conservation de la composante de la vitesse normale à tout interface; le mouvement relatif particule de l'interface/interface est donc purement tangentiel à l'interface; autrement dit les particules fluide glissent le long de l'interface sans la traverser; par conséquent :

Une particule fluide de la surface libre reste constamment sur cette surface

2. Si une particule vérifie $z = \xi$ à un instant t , elle le vérifie ultérieurement; donc :

$$(w)_{(z=\xi)} = \left(\frac{D\xi}{Dt} \right)_{(z=\xi)} = \left(\frac{D\xi}{Dt} \right)_{(z=\xi)} \quad (20)$$

De même, si une particule vérifie $z = z_0$ à un instant t , elle le vérifie ultérieurement; donc :

$$(w)_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz_0}{Dt} \right)_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz_0}{Dt} \right)_{(z=z_0)} \quad (21)$$

3. (a) * Le fond fixe vérifie $z = 0$; on a donc $\xi = 0$ et la relation (20) s'écrit :

$$[w]_{(z=0)} = 0$$

Avec $\vec{v} (M \in \text{fluide}) = \text{grad} \varphi$, on obtient :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=0)} = 0 \quad (22)$$

* La surface libre vérifie $z = z_0(x, t)$; la relation (21) s'écrit :

$$[w]_{(z=z_0)} = \left(\frac{Dz_0}{Dt} \right)_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla} z_0)_{(z=z_0)}$$

avec $\vec{v} = u\vec{x} + v\vec{y} + w\vec{z}$ et $\vec{\nabla} z_0 = \frac{\partial z_0}{\partial x} \vec{x}$, on obtient :

$$[w]_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + (u)_{(z=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x}$$

Avec $\vec{v}(M \in \text{fluide}) = \overrightarrow{\text{grad}}\varphi$, on obtient :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(x=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x}$$

- (b) Les particules fluides glissent le long de la surface libre; autrement dit, la vitesse verticale w d'une particule est clairement la somme de la vitesse verticale de la surface libre (à savoir $\frac{\partial z_0}{\partial t}$) et de la composante verticale de la vitesse de glissement (à savoir $(u)_{x=z_0} \tan \alpha$ où α est l'angle que fait la tangente à la surface libre avec l'axe $Ox \Rightarrow \tan \alpha = \frac{\partial z_0}{\partial x}$ et $(u)_{x=z_0} \tan \alpha = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{x=z_0} \cdot \frac{\partial z_0}{\partial x}$)

- (c) Avec $a \ll \lambda$, on a, en o.d.g :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial z_0}{\partial t} \sim \frac{H}{T} \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(x=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x} \sim V \frac{H}{\lambda} \sim \frac{a}{T} \frac{H}{\lambda} \end{array} \right\} \Rightarrow \left(a \ll \lambda \Rightarrow \left\| \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_{(x=z_0)} \frac{\partial z_0}{\partial x} \right\| \ll \left\| \frac{\partial z_0}{\partial t} \right\| \right)$$

et la condition aux limites sur la surface libre s'écrit, à cet ordre d'approximation :

$$\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = \frac{\partial z_0}{\partial t}$$

4. La relation (19) pointée sur la surface libre donne :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \frac{P(z=z_0)}{\mu} + g z_0 = f(t)$$

D'après la relation de Laplace (13) :

$$P(z=z_0) = P_0 - \gamma \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2}$$

donc : $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=z_0} + \frac{P_0}{\mu} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^2 z_0}{\partial x^2} + g z_0 = f(t)$, ce qui donne, par dérivation par rapport au temps :

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} \right)_{z=z_0} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 z_0}{\partial t \partial x^2} + g \frac{\partial z_0}{\partial t} = f'(t)$$

en injectant la condition aux limites sur la surface libre : $\frac{\partial^3 z_0}{\partial t \partial x^2} = \frac{\partial^3 z_0}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=z_0} \right] = \left(\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial t} \right)_{z=z_0}$

la condition aux limites portant sur φ sur la surface libre s'écrit donc :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=z_0)} = f'(t)$$

Avec $H \ll h$, z_0 est assimilable à h et on obtient à l'ordre un :

$$\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \frac{\gamma}{\mu} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} + g \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right]_{(z=h)} = f'(t) \quad (23)$$

3 Relation de dispersion et mise en évidence des cas limites

3.1 Relation de dispersion

1. * Le milieu est illimité dans la direction \vec{x} ; il est donc "naturel" de chercher des solutions présentant un caractère progressif en x assuré par le couplage spatio-temporel entre x et t ; à z fixé, le potentiel réel candidat est du type $A \cos(\omega t - kx)$.

* Le milieu est limité dans la direction \vec{z} ; il est donc "naturel" de chercher des solutions présentant un caractère stationnaire en z assuré par le découplage spatio-temporel entre z et t ; à x fixé, le potentiel réel candidat est à variables séparées du type $\Psi(z) \cos(\omega t + \varphi)$.

2. φ satisfait à l'équation de Laplace (18) ainsi qu'aux conditions aux limites (22) et (23). On cherche des solutions de la forme :

$$\varphi(x, z, t) = \Psi(z) \exp[i(\omega t - kx)] \quad (24)$$

* (18) donne : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$ soit $-k^2 \Psi + \frac{d^2 \Psi}{dz^2} = 0$ soit $\Psi(z) = A \cosh(kz) + B \sinh(kz)$

* (22) $\Rightarrow \left(\frac{d\Psi}{dz} \right)_{z=0} = 0 \Rightarrow B = 0$

* (23) $\Rightarrow \left[-\omega^2 A \cosh(kh) + \frac{\gamma}{\mu} A k^3 \sinh(kh) + g A k \sinh(kh) \right] \exp[i(\omega t - kx)] = f'(t)$

Cette dernière relation doit être vérifiée $\forall x$ et $\forall t$

$\Rightarrow \omega^2 = \left(gk + \frac{\gamma}{\mu} k^3 \right) \text{th}(kh)$ et $f' = 0$

Finalement, f est une constante et la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk \left[1 + (kl_C)^2 \right] \text{th}(kh)} \quad (25)$$

où $l_C = \sqrt{\frac{\gamma}{\mu g}}$ est la "longueur capillaire"

3.2 Cas des ondes de gravité (vagues).

1. Vitesse de phase

- (a) Les effets de gravité dominent lorsque $(kl_C)^2 \ll 1$ i.e $\lambda \gg l_C$

$$\text{ondes de gravité} \Leftrightarrow \lambda \gg l_C$$

- (b) $\sqrt{1 + (kl_C)^2} \simeq 1 + \frac{(kl_C)^2}{2}$

En pratique, avec $l_C \simeq 2,7 \text{ mm}$, si on tolère une erreur maximale de 1%, il faut $\frac{(kl_C)^2}{2} < 0,01$, soit $\lambda > 12 \text{ cm}$

$$\text{Le domaine des ondes de gravité est défini par } \lambda > 12 \text{ cm}$$

- (c) dans ce domaine, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk \text{th}(kh)}$$

et la vitesse de phase :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k} \text{th}(kh)} = \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi} \text{th}(kh)}$$

2. Ondes de gravité en eau profonde

- (a) En eau profonde ($kh \gg 1$), $\text{th}(kh) \simeq 1$ et

$$c \simeq \sqrt{g \frac{\lambda}{2\pi}}$$

On retrouve bien l'expression c_V obtenue à la question 1 de la sous-section 1.1 par analyse dimensionnelle.

On remarque que la célérité est contrôlée par la longueur d'onde

- (b) En pratique, $\sqrt{\text{th}(kh)}$ est assimilable à 1 à mieux que 1% près pour $kh > 2,3$ soit $h > 0,4\lambda$

$$\text{Le domaine des ondes de gravité en eau profonde est défini par } 12 \text{ cm} < \lambda < 2,5h \Rightarrow h > 4,8 \text{ cm}$$

La vitesse de phase dépendant de la longueur d'onde, le milieu est dispersif; il présente une dispersion normale puisque la célérité est une fonction croissante de la longueur d'onde (les grandes longueurs d'onde se propagent plus vite que les courtes).

3. En eau peu profonde ($kh \ll 1$), $th(kh) \simeq kh$ et $c \simeq \sqrt{gh}$

La vitesse de phase est indépendante de la longueur d'onde; le milieu n'est donc pas dispersif mais on peut remarquer que la vitesse de phase dépend de la profondeur de la nappe d'eau.

En pratique, $\sqrt{th(kh)} \simeq \sqrt{kh - \frac{(kh)^3}{3}} \simeq \sqrt{kh} \left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right)$ est assimilable à \sqrt{kh} à mieux que 1% près pour $kh < 0,25$ soit $h < 0,04\lambda$

célérité des ondes de gravité en eau peu profonde :

$$c = \sqrt{gh} \text{ (pas de dispersion)}$$

la profondeur contrôle la célérité

Le domaine des ondes de gravité en eau peu profonde est défini par $\lambda > 12cm$ et $\lambda > 25h$

3.3 Cas des ondes de capillarité (rides).

1. Vitesse de phase

- (a) Les effets de capillarité dominent lorsque $(kl_C)^2 \gg 1$ i.e $\lambda \ll l_C$

$$\text{ondes de capillarité} \Leftrightarrow \lambda \ll l_C$$

- (b) $\sqrt{1 + (kl_C)^2} = kl_C \sqrt{1 + \frac{1}{(kl_C)^2}} \simeq kl_C \left(1 + \frac{1}{2(kl_C)^2}\right)$ est assimilable à kl_C à mieux que 1% près pour $kl_C > 7,1$

En pratique, avec $l_C \simeq 2,7mm$, il faut $\lambda < 2,4mm$

$$\text{Le domaine des ondes de capillarité est défini par } \lambda < 2,4mm$$

- (c) dans ce domaine, la relation de dispersion s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk^3 l_C^2 th(kh)}$$

et la vitesse de phase :

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gkl_C^2 th(kh)} = \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\lambda\mu} th(kh)}$$

2. Ondes capillaires en eau profonde

- (a) En eau profonde ($kh \gg 1$), $th(kh) \simeq 1$ et

$$c \simeq \sqrt{\frac{2\pi\gamma}{\lambda\mu}}$$

On retrouve bien l'expression c_S obtenue plus haut par analyse dimensionnelle.

On note que la longueur d'onde contrôle la célérité

- (b) En pratique, on a vu que $\sqrt{th(kh)}$ est assimilable à 1 à mieux que 1% près pour $h > 0,4\lambda$

$$\text{Le domaine des ondes de capillarité en eau profonde est défini par } \lambda < 2,4mm \text{ et } \lambda < 2,5h$$

- (c) La vitesse de phase dépendant de la longueur d'onde, le milieu est dispersif; il présente une dispersion anormale puisque la célérité est une fonction décroissante de la longueur d'onde (les grandes longueurs d'onde se propagent moins vite que les courtes).

3. En eau peu profonde, on a vu que $\sqrt{th(kh)}$ est assimilable à \sqrt{kh} à mieux que 1% près pour $h < 0,04\lambda$. Le domaine des ondes de capillarité en eau peu profonde est donc défini par $\lambda < 2,4mm$ et $h < 0,1mm$; or à cette échelle de profondeur la viscosité ici négligée joue un rôle important. L'expression de la célérité obtenue dans ce cas limite n'a donc pas beaucoup de sens!

4. Dans l'approximation en eau profonde ($\sqrt{th(kh)} \simeq 1$), réalisée à mieux que 1% près lorsque $h > 0,4\lambda$, la relation (25) s'écrit :

$$\omega = \sqrt{gk [1 + (kl_C)^2]}$$

et la célérité :

$$c = \sqrt{g \left[\frac{1}{k} + k(l_C)^2 \right]}$$

c passe par un minimum lorsque $\frac{1}{k} = k(l_C)^2$ (somme de deux termes de produit constant)

$$c \text{ passe par un minimum pour } k = \frac{1}{l_C}$$

4 Ondes créées à la surface de l'eau (en eau profonde) par la chute d'un objet

1. La chute d'un objet dans l'eau crée une perturbation dont le spectre a une extension $[k_1, k_2]$ (ou $[\omega_1, \omega_2]$) liée à la masse de l'objet et à sa taille; les différentes composantes sinusoïdales de cette perturbation initiale se propagent indépendamment les unes des autres à des vitesses différentes puisque le milieu est dispersif en eau profonde: les composantes de Fourier se détachent du paquet initial, les plus rapides devant les autres.

Dans le cas de la chute d'une pierre, les "grandes" longueurs d'onde dominent dans le spectre et le paquet d'ondes est principalement constitué d'ondes de gravité ($\lambda > 12cm$) pour lesquelles la dispersion est normale; les plus grandes longueurs d'onde du spectre se propagent plus vite que les courtes, ce qui met en évidence les trois clichés des figures 9, 10 et 11. Au fur et à mesure que le temps s'écoule, subsistent dans le champ les composantes les moins rapides i.e de plus courtes longueurs d'onde.

2. Dans le cas de la figure 12 (chute d'un petit gravier), on peut penser que le spectre de la perturbation initiale est principalement constitué d'ondes de capillarité ($\lambda < 2,4mm$) ou d'ondes pour lesquelles la capillarité ne saurait être négligée. On observe effectivement un cas de dispersion anormale, les courtes longueurs d'onde se propageant plus vite que les grandes.

5 La houle irrotationnelle de Stokes

5.1 Généralités

1. Considérons une petite perturbation de la surface libre plane, faisant apparaître des "petits" creux et des "petites" bosses; la vitesse du vent est plus importante au niveau d'une bosse qu'au niveau d'un creux si bien que la pression régnant au dessus d'une bosse est plus faible que celle régnant au dessus d'un creux (d'après le théorème de Bernoulli) ce qui va dans le sens d'une amplification de la perturbation initiale.
2. La houle est une onde de gravité pure car $\lambda \gg l_C$.
3. Considérons la relation (19) pointée sur la surface libre :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=z_0} + \frac{P(z=z_0)}{\mu} + gz_0 = f$$

soit, à l'ordre d'approximation considéré ($H \ll h$) et en négligeant les effets de capillarité :

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=h} + \frac{P_0}{\mu} + gz_0 = f$$

ce qui donne (cf. 2 de la sous-section 3.1) : $i\omega A ch(kh) \exp[i(\omega t - kx)] + \frac{P_0}{\mu} + gz_0 = f$

or on avait montré (2) que f est constante que l'on peut déterminer en considérant la valeur moyenne de la relation précédente, soit $\frac{P_0}{\mu} + gh = f$, donc (sur \mathbb{C}) $z_0 = h - \frac{i\omega}{g} A ch(kh) \exp[i(\omega t - kx)]$

En en prenant la partie réelle et en faisant apparaître le creux H de la surface libre ($\frac{H}{2} = \frac{wA}{g} ch(kh)$), on obtient :

$$\Psi(z) = Ach(kz) = \frac{Hg ch(kz)}{2\omega ch(kh)}$$

4. et donc

$$z_0 = h + \frac{H}{2} \sin(\omega t - kx)$$

La surface libre est donc sinusoïdale à cet ordre d'approximation.

5. Champ des vitesses

(a) En prenant la partie réelle du potentiel complexe des vitesses :

$$\varphi = Ach(kz) \cos(\omega t - kx) = \frac{Hg ch(kz)}{2\omega ch(kh)} \cos(\omega t - kx)$$

donc :

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{H g k ch(kz)}{2\omega ch(kh)} \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{H g k sh(kz)}{2\omega ch(kh)} \cos(\omega t - kx)$$

or $\frac{w}{k} = c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} th(kh)$ (onde de gravité pure) et $\lambda = cT$ donc :

$$c = \frac{gT}{2\pi} th(kh)$$

Finalement :

$$u = \frac{\pi H ch(kz)}{T sh(kh)} \sin(\omega t - kx)$$

$$w = \frac{\pi H sh(kz)}{T sh(kh)} \cos(\omega t - kx)$$

(b) Donc

$$u_{\max} = \frac{\pi H ch(kh)}{T sh(kh)}$$

$$w_{\max} = \frac{\pi H}{T}$$

5.2 Cas de la houle en eau profonde ($kh \gg 1$ soit $h \gg \lambda$).

1. Hiérarchie des paramètres géométriques

(a) $kh \gg 1 \Rightarrow u_{\max} \sim w_{\max} \sim \frac{H}{T} \Rightarrow V \sim \frac{H}{T} \sim \frac{g}{\lambda}$

Les vitesses horizontale et verticale ont même ordre de grandeur ($\frac{H}{T}$)

(b) L'échelle spatiale caractéristique du mouvement des particules fluides est donc $a \sim H$

(c) La condition de linéarisation de l'équation d'Euler impose $a \ll \lambda$ soit $H \ll \lambda$. On a donc :

$$H \ll \lambda \ll h$$

2. En eau profonde, $c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$; avec $\lambda = 100m$, on calcule :

$$c = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}} \simeq 12,5 m.s^{-1} \text{ et } T = \frac{\lambda}{c} \simeq 8s$$

3. On a vu plus haut que cette relation est vérifiée à mieux que 1% près lorsque :

$$h > \frac{\lambda}{2,5} = 40m$$

4. En eau profonde, le milieu est dispersif; le spectre du train d'ondes produit dans le fetch a une certaine étendue; les composantes sinusoïdales de grande longueur d'onde se propagent plus vite ce qui provoque l'étalement du train. Loin du fetch, les composantes de grande longueur d'onde précèdent celles de courte longueur d'onde; or la période varie comme $\sqrt{\lambda}$

Les composantes de grande période précèdent celles de courte période

cf. clichés des figures 9, 10 et 11.

5. On peut interpréter le phénomène en évoquant les battements entre deux composantes sinusoïdales de périodes voisines du spectre de la houle.

5.3 Cas de la houle en eau peu profonde ($kh \ll 1$ soit $h \ll \lambda$).

1. Hiérarchie des paramètres géométriques

(a) $kh \ll 1 \Rightarrow u_{\max} \sim \frac{\pi H}{T} \frac{1}{kh} \sim \frac{H}{T} \frac{\lambda}{h}$ et $w_{\max} \sim \frac{H}{T} \Rightarrow \frac{u_{\max}}{w_{\max}} \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1$
 donc $V \sim u_{\max} \sim \frac{H}{T} \frac{\lambda}{h} \sim \frac{g}{\lambda}$

$$\frac{u_{\max}}{w_{\max}} \sim \frac{h}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \text{La vitesse verticale est négligeable devant la vitesse horizontale}$$

(b) L'échelle spatiale caractéristique du mouvement des particules fluides est $a \sim H \frac{\lambda}{h}$

(c) La condition de linéarisation de l'équation d'Euler impose $a \sim H \frac{\lambda}{h} \ll \lambda$ soit $H \ll h$. On a donc :

$$H \ll h \ll \lambda$$

2. En eau peu profonde, $c = \sqrt{gh}$

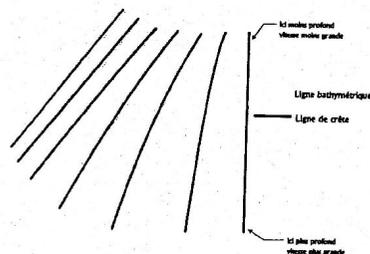
La diminution de c avec la profondeur h a les conséquences suivantes :

Si la houle se propage normalement aux lignes bathymétriques, sa longueur d'onde diminue à l'approche du rivage car sa période reste constante;

les lignes de crêtes sont donc de plus en plus serrées au fur et à mesure de la progression vers le rivage

3. Lorsque la direction de propagation de la houle est quelconque par rapport aux lignes bathymétriques, les célérités sont différentes en deux points d'une même ligne de crête de houle; les lignes de crête ne restent donc pas parallèles; elles se resserrent du côté des petites profondeurs (voir figure ci-dessous)

la houle "tourne" en ce sens que les lignes de crêtes tendent à devenir parallèles aux lignes bathymétriques



- (a) En eau peu profonde (à l'approche du rivage), $c = \sqrt{gh}$; la célérité de l'onde diminue lorsque la profondeur diminue tandis que la vitesse caractéristique des particules fluides ($V \sim c \frac{H}{h} \sim H \sqrt{\frac{g}{h}}$) augmente (h diminue et H augmente!).
Il est donc clair que la condition de linéarisation ($V \ll c$) finit par ne plus être vérifiée et les effets de non-linéarité finissent par se faire sentir.
- (b) La vitesse du fluide sur la crête des vagues augmente tandis que la célérité de la vague diminue; la vague se déforme donc par un "raidissement" de son front.
- (c) Ce raidissement peut conduire au déferlement de la vague lorsque la vitesse du fluide sur la crête devient supérieure à la célérité de l'onde.

6 Un exemple d'onde non linéaire : l'onde "solitaire"

1. Dispersion en fréquence

- (a) Par la relation $\Delta x \times \Delta k \sim 1$, on obtient $\Delta k \sim \frac{1}{d}$
D'autre part, $k_{\min} = 0$ puisque le profil présente une valeur moyenne non nulle
Donc :

$$k_{\min} = 0 \text{ et } k_{\max} \sim \frac{1}{d}$$

- (b) On a $kh < \frac{h}{d} < 1$

kh n'étant pas négligeable devant 1, on ne peut pas assimiler $th(kh)$ à kh ni donc c à \sqrt{gh}

Néanmoins, $(kh)^2 < \left(\frac{h}{d}\right)^2 \ll 1$, donc $th(kh) \simeq kh - \frac{(kh)^3}{3}$

donc $c = \sqrt{\frac{g}{k} th(kh)} \simeq \sqrt{gh} \left(1 - \frac{(kh)^2}{6}\right)$

c dépend donc de k à cet ordre d'approximation : le milieu est dispersif.

Les composantes de Fourier de l'onde se propagent à des vitesses différentes ce qui tend à produire un étalement du profil.

- (c) En laissant "tomber" le facteur 6 dans ce calcul en ordres de grandeur :

$$\left. \begin{array}{l} c_{\min} \sim \sqrt{gh} \left[1 - \left(\frac{h}{d}\right)^2\right] \\ c_{\max} = \sqrt{gh} \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta c \sim \sqrt{gh} \left(\frac{h}{d}\right)^2$$

2. Dans le cas d'une onde sinusoïdale en eau peu profonde contrôlée uniquement par la profondeur, $c = \sqrt{gh}$

À la base du profil : $c = \sqrt{gh}$

Au sommet du profil : $c = \sqrt{g(h+H)} \simeq \sqrt{gh} \left(1 + \frac{H}{2h}\right)$ } $\Rightarrow \Delta c' \sim \sqrt{\frac{g}{h}} \frac{H}{2}$

3. Dans l'onde solitaire les phénomènes de dispersion en fréquence et en amplitude se compensent.
En ordres de grandeur, on a :

$$(\Delta c \sim \Delta c') \Leftrightarrow U = \frac{Hd^2}{h^3} \sim 1$$

Références

- [1] L.LANDAU et E.LIFCHITZ : "Mécanique" (Mir,1969)
- [2] R.FEYNMAN : "La nature de la physique" (Ed. du seuil,1980)
- [3] J.M.BONNET-BIDAUD : "Les éternels succès de Newton" (Science et vie hors série, déc. 1998)
- [4] H.GIE : "Les effets de marée" (BUP n°652, mars 1983)
- [5] R.BONNEFILLE : "Cours d'hydraulique maritime" (Masson, 3^{ème} édition, 1992)
- [6] Site internet du S.H.O.M : "http://www.shom.fr/sci/marcour/maree11.html"
- [7] B.LAHAYE : "Propagation de ondes; vitesse de phase; vitesse de groupe" (BUP n°649, décembre 1982)
- [8] E.GUYON,C.BETRENCOURT,J.C.DEROCHE : "Exploration de la matière" (De Boeck Université, 1995)
- [9] E.GUYON,J.P.HULIN,L.PETIT : "Hydrodynamique physique" (Inter-Editions/CNRS,1991)
- [10] Problèmes de concours : Mines TA 1989, X P' 1992, Ecrin P' 1995