

Etude de quelques éléments d'un train d'une ligne non électrifiée

Le moteur des premières locomotives diesels fut inventé en 1892 par l'ingénieur allemand Rudolf Diesel. C'est l'objet de la première partie de ce problème. Mais ces premières locomotives furent un échec : le nombre de vitesses de leur transmission mécanique était insuffisant.

La locomotive diesel - électrique se passe de boîte de vitesse mécanique : elle est munie d'un moteur diesel qui, en tournant, entraîne un alternateur. Ce dernier fournit de l'énergie à plusieurs moteurs électriques de traction: en somme, cette locomotive fabrique grâce au moteur thermique sa propre électricité. La seconde partie est consacrée à l'étude de l'alternateur triphasé synchrone puis à celle d'un moteur électrique asynchrone (qui équiperont la nouvelle génération de locomotives diesels électriques B-75000).

La troisième partie du problème est consacrée aux roues du train : on verra que les wagons penchent dans une courbe car il n'existe pas, comme sur les automobiles, de « différentiel », système qui permet aux roues de tourner à des vitesses angulaires différentes.

Enfin, quel voyageur n'a pas été confronté à l'obscurité dans son compartiment lors de l'entrée dans un tunnel ? Il n'est pas rare que l'éclairage se mette en marche... une fois le tunnel terminé ! On verra pourquoi l'allumage de l'éclairage par tube à décharge n'est pas instantané dans la quatrième partie.

Heureusement, les petites veilleuses des wagons procurent au lecteur un faisceau de lumière qui ne dérange pas son voisin endormi. C'est l'objet de la dernière partie.

Les parties sont totalement indépendantes : elles peuvent être abordées sans que ce qui précède ait été traité.

On donne la valeur de l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$ et on rappelle les valeurs de quelques constantes dans le système international d'unités :

✓ la permittivité du vide $\epsilon_0 = 8,8541 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$;

✓ la perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$;

✓ la vitesse de la lumière dans le vide: $c = 2,99792 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$, telle que $\epsilon_0 \cdot \mu_0 = \frac{1}{c^2}$;

✓ la constante des gaz parfaits: $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

On donne les formules trigonométriques suivantes:

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \sin \alpha - \sin \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \cdot \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad \sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2} \quad \tan 2\alpha = \frac{2 \cdot \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

ainsi que les développements limités:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot x ;$$

$$\sin(x) \approx x ;$$

$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

I - Moteur diesel

I-1) Propriétés d'un gaz parfait :

- I.1.1) Rappeler l'équation d'état que suit une quantité de matière n d'un gaz parfait à la pression P , dans un volume V , à la température T .
- I.1.2) On note C_p et C_v les capacités thermiques respectivement à pression et à volume constants, et on rappelle l'énoncé des deux premières lois de Joule pour un gaz parfait, concernant l'énergie interne U et l'enthalpie H :

$$dU = C_v \cdot dT$$

$$dH = C_p \cdot dT$$

Exprimer C_p et C_v en fonction de n , de R et de $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$.

I-2) Transformations d'un gaz parfait:

On supposera que le gaz n'est soumis qu'aux forces de pression. On s'intéresse à une transformation de ce gaz parfait qui le fait passer de l'état initial de pression P_i et de volume V_i à l'état final de pression P_f et de volume V_f . On exprimera les réponses aux questions qui suivent, uniquement en fonction de P_i , V_i , P_f , V_f , et de γ .

- I.2.1) Exprimer le travail W_{isoV} échangé par ce gaz lors d'une transformation isochore réversible.
- I.2.2) Exprimer le travail W_{isoP} échangé par ce gaz lors d'une transformation isobare réversible.
- I.2.3) Exprimer le transfert thermique Q_{isoV} échangé par ce gaz lors d'une transformation isochore réversible.
- I.2.4) Exprimer le transfert thermique Q_{isoP} échangé par ce gaz lors d'une transformation isobare réversible.
- I.2.5) Exprimer le transfert thermique Q_{isoS} échangé par ce gaz lors d'une transformation adiabatique réversible.
- I.2.6) Démontrer la loi de Laplace $P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma$ que suit le gaz parfait lors d'une transformation adiabatique réversible.

I-3) Etats thermodynamiques successifs lors du cycle diesel :

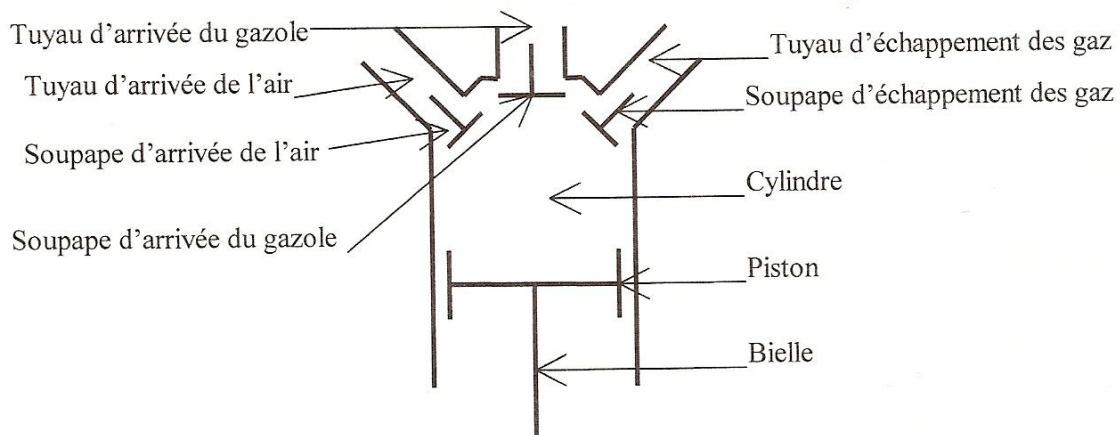


figure 1

On s'intéresse à un gaz parfait ($\gamma = 1,40$) dans un cylindre de volume variable, entre $V_{\min} = 150 \text{ mL}$ et $V_{\max} = 400 \text{ mL}$, fermé par un piston (cf. figure 1), qui subit un cycle réversible dont les caractéristiques sont :

- ✓ Admission: la soupape d'arrivée de l'air est ouverte (la pression est $P_{\text{atm}} = 1,00 \times 10^5 \text{ Pa}$, la température $T_{\text{atm}} = 300 \text{ K}$), les autres fermées. Le volume passe de $V_{\min}$ à $V_{\max}$ de façon isobare et isotherme.
- ✓ $A \rightarrow B$: compression. Les soupapes sont fermées. Le volume passe de $V_{\max}$ à $V_{\min}$ de façon adiabatique et réversible.
- ✓ $B \rightarrow C$: injection. Les soupapes sont fermées, sauf celle d'injection du gazole. Le volume augmente jusqu'à $V_C = 250 \text{ mL}$, on modélise cette phase de combustion par une évolution isobare ($P = P_{\max}$) au cours de laquelle le gaz reçoit un transfert thermique lié à l'injection de gazole.
- ✓ $C \rightarrow D$: détente. Les soupapes sont toutes fermées. Le volume augmente encore (jusqu'à $V_{\max}$) mais la pression diminue (il s'agit d'une détente adiabatique et réversible).
- ✓ $D \rightarrow A$: ouverture de la soupape d'échappement des gaz. La pression diminue brutalement jusqu'à P_{atm} , le volume restant constant.
- ✓ Ejection des gaz: la soupape d'échappement des gaz est ouverte, les autres fermées. Le volume passe de $V_{\max}$ à $V_{\min}$ de façon isobare.

Déterminer numériquement (dans les unités du système international) les caractéristiques de chaque état thermodynamique intermédiaire (pression, température, volume) :

- I.3.1) en A : la pression P_A , le volume V_A , et la température T_A ;
- I.3.2) en B : la pression P_B , le volume V_B , et la température T_B ;
- I.3.3) en C : la pression P_C , le volume V_C , et la température T_C ;
- I.3.4) en D : la pression P_D , le volume V_D , et la température T_D .

I.4) Transformations lors du cycle diesel :

Déterminer numériquement lors des phases:

- I.4.1) $A \rightarrow B$: le travail W_{AB} et la chaleur Q_{AB} échangés par le gaz parfait ;
- I.4.2) $B \rightarrow C$: le travail W_{BC} et la chaleur Q_{BC} échangés par le gaz parfait ;
- I.4.3) $C \rightarrow D$: le travail W_{CD} et la chaleur Q_{CD} échangés par le gaz parfait ;
- I.4.4) $D \rightarrow A$: le travail W_{DA} et la chaleur Q_{DA} échangés par le gaz parfait.

I.5) Diagramme de Clapeyron du cycle diesel :

- I.5.1) Exprimer numériquement la somme des travaux échangés W_{tot} par le gaz parfait sur un cycle. Que penser de son signe?
- I.5.2) Tracer le cycle $P = f(V)$ dans les coordonnées de Clapeyron.
- I.5.3) Dans quel sens est parcouru le cycle diesel dans le diagramme de Clapeyron ? Est-ce normal ?

I.6) Rendement du moteur diesel :

- I.6.1) Définir le rendement thermodynamique η .
- I.6.2) Calculer η .
- I.6.3) La vitesse maximale de rotation est $N = 1,50 \times 10^3 \text{ tr/min}$.
Calculer la puissance maximale P_{moteur} de ce moteur diesel.

II - Alternateur triphasé et moteur asynchrone

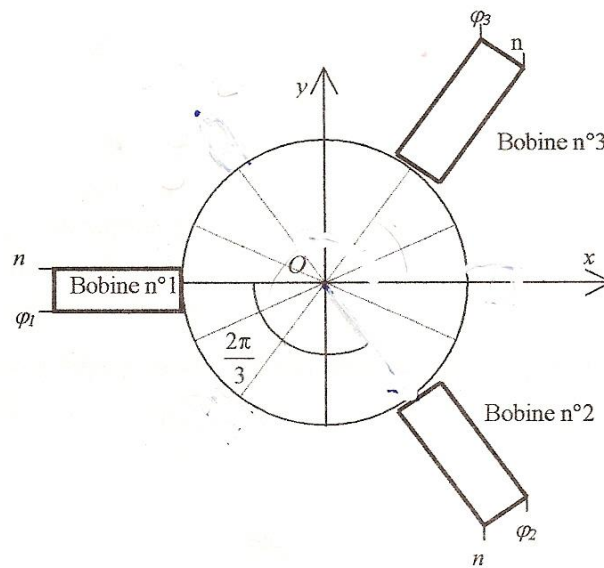


figure 2

II-1) Etude de l'alternateur triphasé :

$(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est un repère orthonormé direct. On considère le dispositif représenté figure 2. Le stator est constitué de trois enroulements cylindriques identiques d'aire S . On repère par le vecteur surface $\vec{S}_1 = S\vec{u}_x$ la surface de la première bobine. Les angles entre les vecteurs repérant les bobines sont : $(\vec{S}_1, \vec{S}_2) = (\vec{S}_2, \vec{S}_3) = \frac{2\pi}{3}$. Chacun des vecteurs $\vec{S}_k$ (pour $k \in [1, 3]$) est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant I_k qui circule dans la bobine n° k .

II.1.1) Exprimer $\vec{S}_2$ et $\vec{S}_3$ dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On n'essaiera pas d'exprimer numériquement les fonctions trigonométriques.

II.1.2) Un rotor, sur lequel se trouve un aimant permanent, tourne autour de l'axe (Oz) avec la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \omega\vec{u}_z$. On admettra qu'il crée un champ magnétique appliqué $\vec{B}$, homogène de valeur B , tournant donc avec la même vitesse angulaire $\vec{\Omega}$. Le rotor est initialement orienté suivant (Ox) : $\vec{B}(t=0) = B\vec{u}_x$.

Donner l'expression des composantes $B_x(t)$ et $B_y(t)$ du champ magnétique appliqué au cours du temps.

II.1.3) Chaque bobine est constituée de N spires et a une section S . La résistance interne de chaque bobine sera supposée nulle. On négligera le champ magnétique induit par les courants dans les bobines devant celui créé par le rotor. On note U_k la tension aux bornes de la bobine n° k , en convention récepteur. On réalise un couplage en « étoile », c'est à dire qu'un des pôles (noté n , de potentiel conventionnellement nul) est commun aux trois bobines. L'autre pôle de la bobine n° k est au potentiel $V_k(t) = U_k(t)$.

II.1.3.a) La tension aux bornes de la bobine n° k est $U_k(t) = R_k I_k - e_k$. Exprimer e_k , en fonction de Φ_k le flux magnétique que reçoit la bobine.

II.1.3.b) Déterminer Φ_1 , Φ_2 et Φ_3 , les flux magnétiques que reçoit chaque bobine n°k, avec $k \in [1;3]$.

II.1.3.c) Montrer que l'on peut mettre les trois tensions $U_k(t)$ sous la forme :

$$U_k(t) = -U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_k).$$

On exprimera U_{max} en fonction de N , S , B et ω , ainsi que les trois phases φ_k .

II.1.3.d) Tracer sur un même graphique $V_1(t)$, $V_2(t)$ et $V_3(t)$.

II.1.3.e) La tension efficace entre un pôle au potentiel $V_k(t)$ quelconque et le neutre n est $U_{mono} = 220 \text{ V}$. En déduire la valeur numérique de U_{max} .

II.1.3.f) Que vaut numériquement la tension efficace U_{tri} entre pôles différents au potentiel $V_k(t)$?

II.2) Etude magnétique du stator du moteur asynchrone :

Soit un solénoïde circulaire, de longueur supposée quasi-infinie suivant son axe (Ox), parcouru par un courant I . Le nombre de spires le constituant par unité de longueur est n . Le vecteur surface $\vec{S} = S \cdot \vec{u}_x$ est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant I qui circule dans le solénoïde.

II.2.1) Question préliminaire : exprimer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le solénoïde en un point quelconque de l'espace en fonction de la perméabilité du vide μ_0 , de n , de I et de $\vec{u}_x$.

II.2.2) Le stator du moteur asynchrone est constitué de trois enroulements cylindriques (qu'on assimilera à des solénoïdes infinis) identiques comme sur la figure 2. On repère les axes respectifs de chacune des bobines par les vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= \vec{u}_x \\ \vec{u}_2 &= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{u}_y \\ \vec{u}_3 &= \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\vec{u}_x + \sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)\vec{u}_y \end{aligned}$$

Chacun des vecteurs $\vec{u}_k$ (pour $k \in [1;3]$) est choisi grâce à la « règle de la main droite » à partir de l'orientation du courant I_k qui circule dans la bobine n°k. On alimente ces trois bobines grâce à du courant triphasé créé par un alternateur triphasé. Aussi, chacune des intensités $I_k(t)$ est de la forme :

$$I_k(t) = -I_0 \cdot \sin(\omega_{tri} \cdot t + \psi_k).$$

avec $\psi_1 = 0$, $\psi_2 = \frac{-2\pi}{3}$ et $\psi_3 = \frac{+2\pi}{3}$.

- II.2.2.a) Montrer que les composantes du champ magnétique peuvent s'exprimer sous la forme :

$$B_x(t) = -B_0 \cdot \sin(\omega_{tr} \cdot t)$$

$$B_y(t) = B_0 \cdot \cos(\omega_{tr} \cdot t)$$

On exprimera B_0 en fonction de μ_0 , de n , de I_0 .

- II.2.2.b) Montrer que le stator du moteur asynchrone crée en O un champ magnétique, de valeur constante B_0 , tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{\vec{B}} = \omega_{\vec{B}} \cdot \vec{u}_z$. Identifier $\omega_{\vec{B}}$.

II.3) Etude électrique du rotor du moteur asynchrone :

Le rotor du moteur asynchrone est une bobine plate, fermée sur elle-même, de surface totale $\vec{S} = S \cdot \vec{u}_r$, de résistance R et d'inductance L qui peut tourner autour d'un axe (Oz) passant par son centre et perpendiculaire à $\vec{S}$. La bobine est solidaire d'un volant de grand moment d'inertie régularisant sa vitesse de rotation $\vec{\Omega}_{\vec{S}} = \omega_{\vec{S}} \cdot \vec{u}_z$. Le rotor du moteur asynchrone ressent le champ magnétique créé par le stator, de valeur constante B_0 , tournant autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire constante $\vec{\Omega}_{\vec{B}} = \omega_{\vec{B}} \cdot \vec{u}_z$. Le retard de phase initial de la bobine sur le champ tournant est φ .

- II.3.1) Déterminer l'équation différentielle qui régit le courant $i(t)$ dans la bobine du rotor, en fonction de R , de L et de ϕ_{ext} , le flux du champ magnétique extérieur à travers la bobine du rotor.
- II.3.2) Représenter, dans le plan (O,x,y) , le champ tournant $\vec{B}$ et le vecteur surface $\vec{S}$ en faisant figurer les angles à l'instant t .
- II.3.3) Exprimer $\phi_{ext}(t)$ en fonction de t , B_0 , S , $\omega_{\vec{B}}$, $\omega_{\vec{S}}$ et φ .
- II.3.4) On veut exprimer l'intensité sous la forme $i(t) = I_{max} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi - \psi)$. Donner l'expression de ω .
- II.3.5) Exprimer I_{max} en fonction de ω , R , L , B_0 et S .
- II.3.6) Faire de même pour $\sin(\psi)$.

II.4) Etude mécanique du rotor du moteur asynchrone :

- II.4.1) Donner l'expression du moment magnétique $\vec{m}$ de la bobine.
- II.4.2) Donner l'expression de la projection Γ_z suivant $\vec{u}_z$ du couple instantané des actions électromagnétiques exercées sur la bobine, en fonction de t , ψ , φ , ω , R , L , B_0 et S .
- II.4.3) Exprimer le couple moyen $C = \langle \Gamma_z \rangle$ en fonction de ω , R , L , B_0 et S .
- II.4.4) Donner l'expression de la valeur C_0 du couple moyen pour $\omega_{\vec{S}} = 0$. Le moteur peut-il démarrer seul?
- II.4.5) Dans quelles conditions le couple est-il moteur ou, au contraire, résistant ?
- II.4.6) Exprimer la valeur maximale C_{max} du couple moyen dans le cas moteur et la vitesse angulaire du rotor $\omega_{\vec{S}} = \omega_{max}$ pour laquelle cette valeur est atteinte.
- II.4.7) Donner l'allure de la courbe représentant $C(\omega_{\vec{S}})$.

III - Forme des roues des trains

III.1) Conditions cinématiques de roulement sans glissement :

On s'intéresse à un chemin de fer sur un sol plan horizontal, qui décrit une courbe en arc de cercle de rayon R_1 pour le rail n°1, à l'intérieur de la courbe, et $R_2 = R_1 + L$ pour le rail n°2, à l'extérieur de la courbe, où $L = 1435 \text{ mm}$ est l'écartement standard des rails en Europe (sauf dans un certain nombre de pays périphériques). On supposera que $L \ll R_1$. On suppose que les roues du train ont un rayon respectivement r_1 pour la roue en contact sur le rail n°1 et r_2 pour le rail n°2. Ces roues de chaque côté de la voie ferrée sont de même axe Δ et sont solidaires ; elles roulent sans glissement sur les rails.

III.1.1) Exprimer le rapport $\frac{\Delta L_2}{\Delta L_1}$ des longueurs parcourues sur les deux rails en fonction de R_2 et R_1 .

III.1.2) Exprimer le même rapport $\frac{\Delta L_2}{\Delta L_1}$ en fonction maintenant de r_2 et r_1 .

III.1.3) En déduire l'expression du rapport $\frac{r_2}{r_1}$ en fonction de L et R_1 .

III.2) Variation du rayon des roues :

III.2.1) Montrer que dans le cas d'un chemin de fer rectiligne, les roues doivent avoir un rayon identique $r_1 = r_2 = r_0$.

III.2.2) Il existe donc un système qui permet de « faire varier » les rayons des roues : posons

$$r_1 = r_0 - \delta \text{ et } r_2 = r_0 + \delta. \text{ On supposera } \delta \ll r_0.$$

Effectuer un développement limité au premier ordre en $\frac{\delta}{r_0}$ du rapport $\frac{r_2}{r_1}$; en déduire

l'expression de δ en fonction de L , r_0 et du rayon de courbure de la voie R_1 .

III.3) Inclinaison du train :

Les roues des trains sont en fait des tronçons de cônes de même axe Δ , identiques et symétriques par rapport à l'axe du train, comme représenté sur la figure 3.

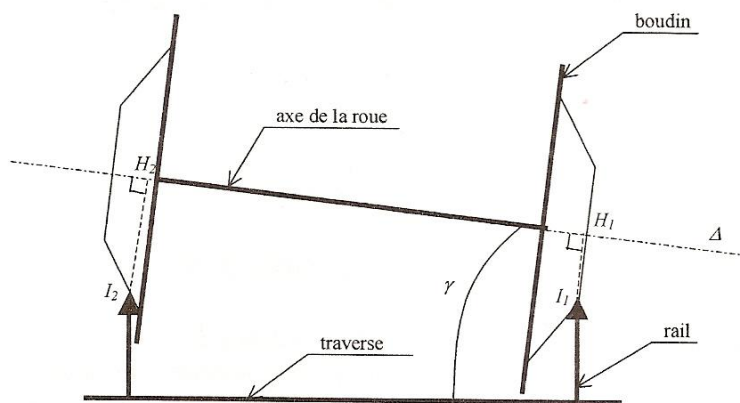


figure 3

On suppose le sol plan horizontal : la traverse est horizontale et les rails verticaux. Le point de contact du rail n°1 (respectivement n°2) avec la roue est noté I_1 (respectivement I_2) : $L = I_1 I_2$. H_1 (respectivement H_2) est le projeté orthogonal de I_1 (respectivement I_2) sur Δ . On a donc $r_1 = I_1 H_1$ et $r_2 = I_2 H_2$. Δ fait un angle γ avec l'horizontale.

III.3.1) Exprimer $\sin(\gamma)$ en fonction de L , r_1 et r_2 .

III.3.2) On rappelle que $\delta \ll r_0$ et $L \ll R_1$. En utilisant un développement limité, donner γ en fonction de R_1 et r_0 .

III.3.3) Que vaut γ dans le cas d'un chemin de fer rectiligne ?

III.3.4) On considère qu'une inclinaison de 2 % reste tolérable pour les voyageurs. Le diamètre moyen des roues de la locomotive diesel électrique est $r_0 = 1,22$ m.

Calculer le rayon de courbure minimal R_{1min} .

IV – Etude de l'éclairage intérieur du train par tube à décharge :

IV.1) Caractéristique du tube à décharge :

Un tube à décharge pour l'éclairage (appelé improprement « tube néon ») est un dipôle électrique parcouru par un courant d'intensité i , et aux bornes duquel la tension est u , en convention récepteur. Il a deux états :

- s'il est éteint, il se comporte comme un interrupteur ouvert (l'intensité i qui le parcourt est nulle) ;
- s'il est allumé, il se comporte comme un résistor de résistance R_a .

De plus, le passage du tube vers un nouvel état dépend de l'état antérieur (« hystérésis ») :

- s'il est éteint, il faut que la tension qu'il subit u devienne supérieure à la tension d'allumage V_a pour qu'il s'allume ;
- s'il est allumé et que la tension qu'il subit u devient inférieure à la tension d'extinction V_e , (avec $V_e < V_a$) il s'éteint.

Données numériques : $E = 150 \text{ V}$, $V_a = 128 \text{ V}$, $R = 100 \text{ k}\Omega$ et $C = 33,0 \text{ }\mu\text{F}$.

IV.1.1) Tracer l'allure de la caractéristique $i = f(u)$ du tube. On fera apparaître les effets d'hystérésis sur le graphique.

IV.1.2) S'agit-il d'un dipôle :

- (commandé ou libre ?)
- (linéaire ou non linéaire ?)
- (actif ou passif ?)

Dans la suite du problème, on alimente le tube par un générateur de Thévenin (de tension continue $E > V_a$ et de résistance R), et on le branche en parallèle avec un condensateur de capacité C (cf. figure 4).

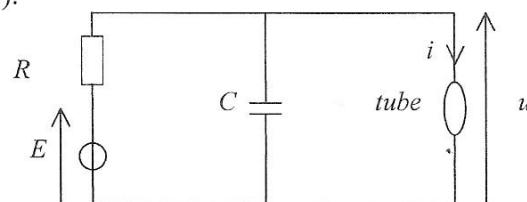


figure 4

IV.2) Tube éteint :

On suppose que le tube est éteint.

IV.2.1) Trouver l'équation différentielle satisfaite par u , la tension aux bornes du tube.

IV.2.2) Exprimer la forme de la solution $u(t)$, en prenant $u(t=0) = 0$.

IV.3) Tube allumé :

On suppose maintenant que le tube est allumé.

IV.3.1) Montrer que le circuit est équivalent à un générateur de Thévenin (de tension E' et de résistance R') qui alimente un condensateur de capacité C . On exprimera en particulier E' et R' en fonction de R , R_a et E .

IV.3.2) Trouver l'équation différentielle satisfaite par u , la tension aux bornes du tube.

IV.3.3) Exprimer, en fonction de t , E' , V_a , t_0 , R' et C , la forme de la solution $u(t)$, pour $t > t_0$, en prenant $u(t = t_0) = V_a$.

V – Etude de l'éclairage procuré par une veilleuse :

Une veilleuse pour lire dans le train (sans déranger ses voisins) est composée d'une ampoule située entre un miroir sphérique et une lentille convergente. Un dispositif muni d'un pas de vis permet le déplacement de cette lentille de façon à modifier l'angle du faisceau sortant de la veilleuse.

V.1) Etude du miroir de la veilleuse :

Le miroir de la veilleuse est un miroir sphérique concave de sommet S_I et de rayon de courbure $R_I = \overline{S_I C_I} = 5,0 \text{ cm}$. L'ampoule halogène sera supposée ponctuelle, en A , sur l'axe optique ; son image est en A_I .

V.1.1) Rappeler la formule de conjugaison avec origine en S_I pour les deux points A et A_I .

V.1.2) Où devrait-on placer l'ampoule si l'on voulait un faisceau réfléchi parallèle ?

V.1.3) Où devrait-on placer l'ampoule si l'on voulait obtenir l'image de l'ampoule halogène sur un écran situé à une distance de 1,00 m de l'ampoule ?

V.1.4) En fait, l'ampoule est placée en C_I .

V.1.4.a) Où se trouve alors A_I ?

V.1.4.b) Quel est l'intérêt d'un tel montage ?

V.1.5) L'ouverture du miroir est $d = 4,0 \text{ cm}$.

V.1.5.a) Rappeler les conditions de Gauss.

V.1.5.b) Si les conditions de Gauss sont vérifiées, qu'est-ce que cela impose sur le rapport $\frac{d}{R_I}$?

V.1.5.c) Cette dernière relation est-elle vraie dans le cas de la veilleuse ?

V.2) Etude des aberrations du miroir de la veilleuse :

Ce qui précède nous amène à étudier les aberrations du miroir. Pour cela, on s'intéresse à un rayon arrivant parallèlement à l'axe du miroir, en I , à une distance $h = \frac{d}{2} = 2,0 \text{ cm}$ de l'axe.

Le rayon réfléchi croise l'axe optique en B , *a priori* différent de F_I' (cf. figure 5). T est sur ce rayon réfléchi, à la verticale de F_I' .

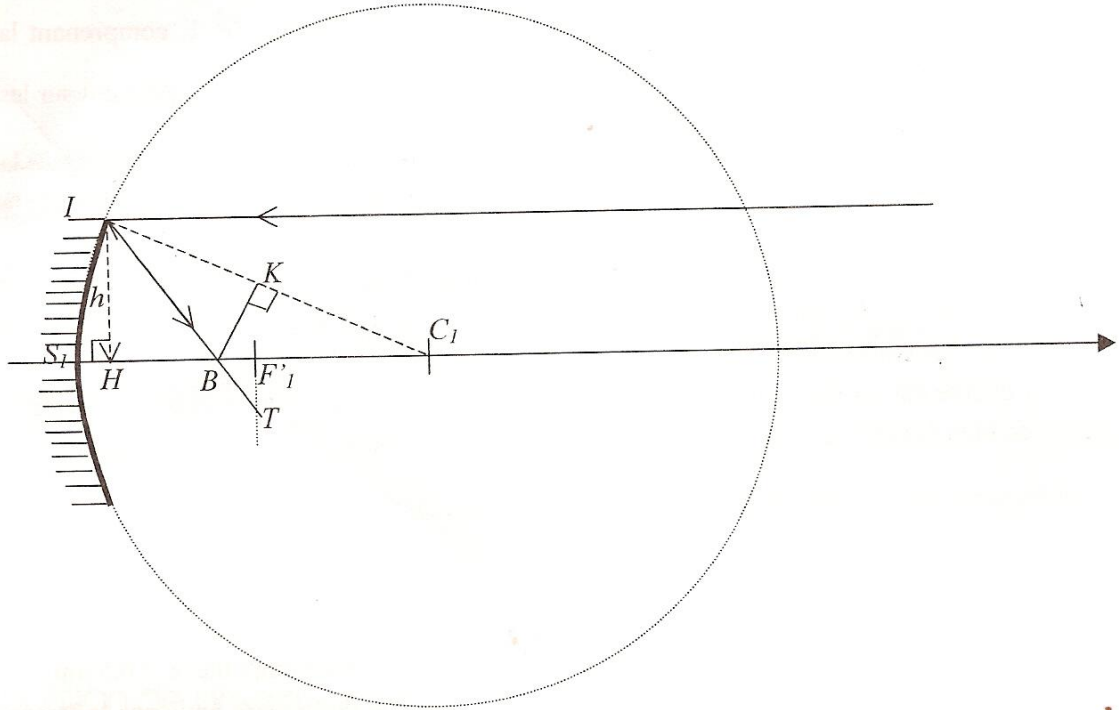


figure 5

V.2.1) Montrer que $\overline{BC_1} = \frac{R_1}{2\sqrt{1 - \left(\frac{h}{R_1}\right)^2}}$.

- V.2.2) Déterminer, en fonction de h et de R_1 , l'aberration longitudinale de sphéricité BF'_1 .
Calculer numériquement BF'_1 .
- V.2.3) Calculer numériquement l'aberration transversale de sphéricité TF'_1 .
- V.2.4) Conclure quant aux aberrations de sphéricité du miroir.
- V.2.5) Doit-on étudier les aberrations chromatiques pour un miroir ? Justifier.

V.3) Etude du réglage du faisceau sortant de la veilleuse par la lentille:

L'ampoule halogène (toujours supposée ponctuelle, en A , sur l'axe optique) éclaire une lentille convergente mince de focale $f'_2 = 2,1$ cm, de diamètre $d = 2.h = 4,0$ cm, de sommet S_2 placé à une distance $x = \overline{AS_2}$ de la lampe. Un pas de vis permet de déplacer cette lentille le long de l'axe optique, faisant varier x entre $x_1 = 1,0$ cm et $x_2 = 2,0$ cm.

- V.3.1) Faire un schéma à l'échelle 1, dans le cas où $x = x_1$, comprenant la lentille et A , ainsi que la construction de trois rayons lumineux qui aboutissent à la formation de A' , image de A par cette lentille.
- V.3.2) Définir la vergence V_2 de la lentille. Donner sa valeur et préciser son unité.
- V.3.3) Déterminer $\overline{S_2A'}$ en fonction de f'_2 et x . Applications numériques pour $x = x_1$ et $x = x_2$.

- V.3.4) Dans le cas où $x = x_1 = 1,0 \text{ cm}$, représenter un schéma à l'échelle 1, comprenant la lentille, A et A' , ainsi que le faisceau lumineux émergent issu de A et s'appuyant sur les bords de la lentille.
- V.3.5) Déterminer α , l'ouverture angulaire du faisceau de lumière émis par la lampe après la lentille en fonction de d , f'_2 et x . Applications numériques (en degrés) pour $x = x_1$ et $x = x_2$.
- V.3.6) On veut que le faisceau lumineux éclaire un livre de taille $t = 20 \text{ cm}$ placé à une distance L de S_2 . En déduire L en fonction de t , d , f'_2 et x . Applications numériques pour $x = x_1$ et $x = x_2$.
- V.3.7) Le livre est en fait à une distance $L = 1,0 \text{ m}$ de la veilleuse. La veilleuse permet-elle de bien éclairer le livre ? (On déterminera numériquement x).

V.4) Etude de la diffraction due à la faible ouverture de la lentille :

On a jusqu'ici négligé la diffraction due à l'ouverture d de la lentille.

- V.4.1) Si on avait $x = f'_2$, que vaudrait l'ouverture angulaire α_0 du faisceau de lumière émis par la lampe après la lentille en négligeant la diffraction ?
- V.4.2) On prendra comme longueur d'onde de la lumière émise par l'ampoule $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$.
- V.4.2.a) Calculer l'ouverture angulaire α_0' du faisceau de lumière émis par la lampe après la lentille en prenant maintenant en compte la diffraction. Application numérique (en degrés).
- V.4.2.b) Comparer numériquement α_0' à α pour $x = x_1$ et $x = x_2$. Conclusion.